Je tiens à remercier Monsieur DENECHERE, étudiant 5GP, pour avoir bien voulu prendre en charge la dactylographie de ce cours.

MÉCANIQUE DES FLUIDES

INTRODUCTION

La mécanique des fluides est l'étude du mouvement des liquides et des gaz. Il est donc nécessaire avant toute chose de définir un fluide.

Un solide est un corps qui ne subit qu'une déformation limitée tant que la contrainte ne dépasse pas un certain seuil (seuil de plasticité). Un fluide est un milieu pour lequel ce seuil est nul. La notion de fluide s'oppose à celle de solide : un fluide est un corps qui peut facilement s'écouler, c'est à dire changer de forme sous l'action d'une force très faible. La limite entre liquide et solide est assez difficile à préciser, la définition étant relativement imprécise. Certains états sont intermédiaires entre les deux : par exemple, le verre en fondant passe par toute une série d'états intermédiaires entre le solide et le liquide.

Dans la suite du cours, nous ne considérerons que des fluides courants, c'est à dire ceux pour lesquels les changements de forme peuvent être accomplis sous l'action d'une force aussi faible que possible (seuil nul). Nous étudierons successivement l'équilibre d'un fluide (Statique des Fluides ou Hydrostatique) et le mouvement d'un fluide (Dynamique des fluides ou Hydrodynamique).

Les phénomènes envisagés en mécanique des fluides ayant un caractère macroscopique, un fluide y sera assimilé à un milieu continu. Ceci veut dire que l'on peut décomposer ce milieu en éléments de volume infinitésimaux, chaque élément de volume constitué d'un nombre considérable de molécules pouvant être considéré comme suffisamment grand par rapport aux distances entre molécules. Dans le cas du fluide, ces éléments de volume (ou particules fluides) sont libres de se déplacer les unes par rapport aux autres alors que dans le solide elles sont solidement liées entre elles.

Les fluides que nous étudierons seront isotropes, mobiles (n'ont pas de forme propre : ils ont la forme du récipient qui les contient ou ils s'écoulent).

Leur déformation peut s'accompagner ou non d'une résistance :
dans le 1er cas, le fluide est visqueux (fluide réel)
dans le 2e cas, le fluide est parfait (Il ne faut pas d'énergie pour modifier sa forme).
Il n'y a pas de forces de viscosité lorsque le fluide est à l'équilibre, ces forces décroissant avec la vitesse et s'annulant avec elle : la statique des fluides réels est par conséquent identique à la statique des fluides parfaits.
D'autre part lorsqu'on étudie un liquide peu visqueux et pour des vitesses faibles, les forces de viscosité sont négligeables et le liquide se comporte comme un fluide parfait d'où l'intérêt de la dynamique des fluides parfaits.

Liquide et gaz : la notion de compressibilité permet de séparer les liquides des gaz.
- Un liquide est un fluide qui occupe un volume déterminé, ce volume ne pouvant varier que très peu (sous l'action de t° ou de la pression)

- Un gaz au contraire occupe toujours le volume maximal: c'est un fluide essentiellement compressible ou expansible.

Nous admettrons dans la suite du cours que l'étudiant est familier avec les notions élémentaires de mécanique des milieux continus.

I STATIQUE DES FLUIDES

I-I Principes et Théorèmes généraux :

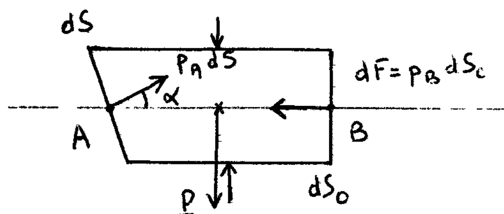
I-I a) Pression en un point d'un fluide en équilibre :

Si ΔF est la force élémentaire exercée sur une surface ΔS en un point d'un fluide en équilibre, on appellera pression en ce point la valeur :

$$\vec{p} = \lim\left(\frac{\Delta F}{\Delta S}\right)_{\Delta S \to 0} = \frac{dF}{dS} \qquad (I)$$

Dans un fluide en équilibre, la pression est normale à la surface correspondante et elle est dirigée vers l'intérieur de la masse fluide considérée. Puisque le fluide est à l'état d'équilibre, une déformation infiniment petite, réalisée à partir de l'état d'équilibre et qui aurait pour effet de faire glisser le fluide parallèlement à dS doit s'effectuer sans travail : la composante tangentielle de ΔF est donc nulle.

La valeur de la pression ne dépend pas de l'orientation de dS. En effet, isolons une portion cylindrique horizontale de fluide limitée par deux surfaces dS et dS_0, dS_0 étant verticale et dS faisant l'angle α avec l'horizontale.



AB est un infiniment petit du Ier ordre

Cette portion de fluide étant en équilibre, la résultante des forces qui lui sont appliquées est nulle.

Ces dernières se composent :

-forces de surface :

. forces de pression p_A dS sur dS et p_B dS_0 sur dS_0

. force de pression sur les parois latérales du cylindre et qui est perpendiculaire à AB

-forces de volume : poids P du fluide contenu dans le cylindre. Infiniment petites du 3ème ordre, ces forces sont négligeables.

Si la résultante des forces appliquées est nulle, sa projection sur AB doit en particulier être nulle. D'où

$$p_A \, dS \cos\alpha - p_B \, dS_0 = 0$$

mais $dS \cos\alpha = dS_0$ donc $\boxed{p_A = p_B}$

Donc on voit que <u>p est indépendant de l'orientation de la surface</u>.

Cette pression en un point d'un fluide est donc une grandeur scalaire qui ne dépend que de la position du point : c'est la pression au point considéré.

<u>Remarque</u> : Par définition, on appellera fluide parfait un fluide pour lequel la force exercée est toujours normale à l'élément de surface sur laquelle elle s'exerce, que ce fluide soit au repos ou en mouvement. Ainsi, il n'existe aucune force qui s'oppose au déplacement du fluide le long d'une paroi ou au glissement de 2 filets fluides les uns sur les autres.

Pour les fluides réels, il n'en est ainsi qu'au repos. Quand un fluide réel est en mouvement la force exercée sur un élément de surface présente une composante tangentielle, conséquence de leur viscosité. Cette composante diminue avec la vitesse de déformation pour devenir nulle avec elle. Un fluide réel en équilibre obéit ainsi aux mêmes lois qu'un fluide parfait.

<u>UNITE DE PRESSION</u> :

Système S. I. : unité de pression est le Pascal $= \dfrac{1 \text{ Newton}}{1 \text{ m}^2}$

Système C. G. S. : barye $= \dfrac{1 \text{ dyne}}{\text{cm}^2}$ 1 Pa = 10 baryes

I bar = 10^6 baryes
I millibar = 10^3 baryes (météorologie)

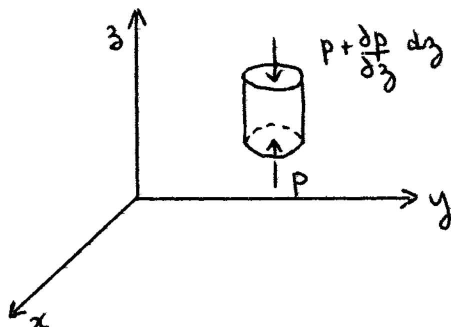
Parmi les unités pratiques, citons le Kgf/cm$^2 \simeq 10^5$ Pa, le cm de mercure qui est la pression exercée par une colonne de I cm de mercure placée dans des conditions normales de t° et de pression (ρHg = 13,595 10^3 kg/m^3 à 0°C)

I cm Hg $\simeq$ 1333 Pa
75 cm Hg $\simeq 10^5$ Pa = I bar
76 cm Hg $\simeq$ 1,013 bar = I atmosphère

On utilise aussi en vide le Torr = I mm de mercure.

I-I b) Equations fondamentales de la statique des fluides :

Considérons un cylindre droit de section dS infiniment petite entourant un point M et d'axe // à Oz.



L'équilibre de ce cylindre se traduit par :

$$\Sigma \vec{F} = 0$$

$\Sigma \vec{F}$ étant la somme des forces appliquées.
Projetons cette égalité sur l'axe Oz :

$$p\, dS - \left(p + \frac{\partial p}{\partial z} dz\right) dS + \rho Z\, dS\, dz = 0$$

$\vec{F} \begin{vmatrix} X \\ Y \\ Z \end{vmatrix}$ Composantes de la force de volume $\vec{F}$ par unité de masse appliquée au fluide.

ρ = masse volumique

Soit $\rho Z - \frac{\partial p}{\partial z} = 0$

En considérant des cylindres dont les axes sont orientés selon les directions Ox et Oy, on en déduirait des équations similaires. D'où le système d'équations :

$$(2)\begin{cases} \rho X - \frac{\partial p}{\partial x} = 0 \\ \rho Y - \frac{\partial p}{\partial y} = 0 \\ \rho Z - \frac{\partial p}{\partial z} = 0 \end{cases} \qquad \boxed{\rho \vec{F} - \overrightarrow{\text{grad}\ p} = 0}$$

<u>Remarque</u> : Dans un fluide quelconque visqueux ou non en <u>équilibre</u>, toutes les contraintes sont normales. Le tenseur des contraintes en un point est donc sphérique :

il est de la forme $\sigma_{ij} = - p\,\delta_{ij}$

Les équations d'équilibre (voir cours 3 GP : équation II-5) s'écrivent :

F_i forces par unité de volume

$$\frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_j} + F_i = \rho \frac{\partial^2 x_i}{\partial t^2} = 0$$

$F_i \longrightarrow$ forces de volume par unité de masse soit I volume unité ρF_i

$$\frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_j} = - \frac{\partial p}{\partial x_j}\delta_{ij} = - \frac{\partial p}{\partial x_i} = - \overrightarrow{\text{grad}\ p}$$

$$\overrightarrow{\text{grad}\ p} = \rho \vec{F}$$

ou $\boxed{\frac{I}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x_i} = F_i}$ (2)

$\boxed{\rho \vec{F} = \overrightarrow{\text{grad}\ p}}$ (2)

Si la force $\vec{F}$ dérive d'un potentiel c'est à dire si l'on a :

$$\vec{F} = - \overrightarrow{\text{grad}}\ V$$

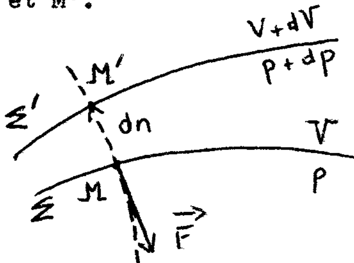
le système d'équations peut s'écrire :

$$\boxed{\rho\, \overrightarrow{\text{grad}}\ V + \overrightarrow{\text{grad}}\ p = 0} \qquad (3)$$

Conséquence : Surfaces d'égale pression et surface libre d'un liquide :

1) Les équations (3) montrent que le vecteur $\overrightarrow{\text{grad}}$ p normal à la surface p = Cte (isobare) est parallèle en chaque point au vecteur $\vec{F}$ et normal par conséquent à la surface équipotentielle V = Cte . Dans un fluide en équilibre, les surfaces équipotentielles sont confondues avec les surfaces isobares.

2) Les surfaces isobares sont aussi des surfaces d'égale densité. Considérons en effet 2 surfaces équipotentielles voisines Σ et Σ' correspondantes aux valeurs V et V+ dV du potentiel et un élément de ligne de force MM' = dn, normal aux 2 surfaces en M et M'.



Le vecteur $\vec{F}$ est tg en M à cette ligne de force : il est dirigé vers les potentiels décroissants :

$$\vec{F} = - \overrightarrow{\text{grad}}\ V = - \frac{dV}{dn}$$

Le vecteur $\overrightarrow{\text{grad}}$ p est parallèle au vecteur $\vec{F}$ et a pour grandeur $\rho \vec{F}$

$$\frac{dp}{dn} = - \rho \frac{dV}{dn} \qquad \boxed{dp = - \rho\ dV}$$

: la variation dp est de signe contraire à celui de la variation du potentiel dV. Comme le quotient $\frac{dp}{dV}$ est le même ∀ l'élément MM' compris entre les surfaces Σ et Σ', la masse spécifique ρ est la même pour tous. Les surfaces équipotentielles et isobares sont aussi les surfaces d'égale densité.

3) Les surfaces isobares sont aussi isothermes. Puisque p et ρ sont constants sur une surface isobare, il en est de même de la t° T : en effet si on considère l'équation d'état du fluide donnée par la thermodynamique : $f(p, \rho, T) = 0$ T est fixée Il se produira toujours des mouvements dans un fluide au sein duquel on produit des différences de t° (eau dans une marmite)

4) Si la masse spécifique ρ est très faible (cas des gaz), les différences de pression $dp = -\rho . dV$ sont aussi très faibles et la pression est pratiquement constante d'un point à un autre du fluide.

5) Si la masse fluide occupe un volume restreint de sorte que le champ de pesanteur soit uniforme, les surfaces équipotentielles du champ peuvent être considérées comme planes : la surface libre d'un liquide en équilibre sous l'action de la pesanteur est un plan horizontal. Les isobares sont également des plans horizontaux.

I-2 Statique d'un fluide incompressible dans le champ de pesanteur : Hydrostatique :

I-2 a) Equation fondamentale de l'hydrostatique :

La masse volumique ρ = Cte (fluide "isovolume")

T = Cte

Si le fluide est soumis aux forces de pesanteur, celles-ci dérivent d'un potentiel $V = g.h$ h = cote du point considéré (énergie potentielle d'une masse unité)



g = accélération de la pesanteur

$\vec{F} = - \overrightarrow{grad}\, V$: forces de volume par unité de masse

L'équation (3) nous donne donc :

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x}(p + \rho g h) &= 0 \\ \frac{\partial}{\partial y}(p + \rho g h) &= 0 \\ \frac{\partial}{\partial z}(p + \rho g h) &= 0 \end{aligned}\right\} \quad (4) \qquad \overrightarrow{grad}\,(p + \rho g h) = 0$$

d'où $\boxed{p + \rho g h = Cte}$ (6)

<u>C'est l'équation fondamentale de l'hydrostatique.</u>

On en déduit les résultats suivants :

I) Les surfaces d'égale pression dans un fluide sont des plans :

$$p = Cte \Rightarrow h = Cte$$

2) La différence de pression $p_I - p_2$ entre deux points quelconques M_I et M_2 de cotes h_I et h_2 d'un fluide en équilibre s'exprime par la relation :

$$p_I + \rho g h_I = p_2 + \rho g h_2$$

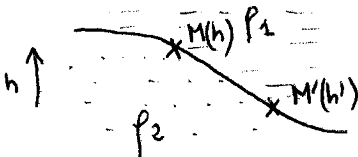
soit $\boxed{p_2 - p_I = - g\rho(h_2 - h_I)}$ (7)

La différence de pression entre 2 points ne dépend que de la distance verticale entre ces 2 points. Elle est égale au poids d'une colonne de fluide ayant comme base l'unité de surface et comme hauteur la différence de niveau entre les 2 points.

<u>Remarque</u> : principe des vases communicants

$$p = Cte \Rightarrow h = Cte$$

3) <u>Surface de séparation de 2 liquides non miscibles en équilibre</u>



Soient 2 points M(h) et M(h') de la surface de séparation de 2 liquides de masses volumiques ρ_I et ρ_2 .
La pression en M est p, en M' p'.

Dans le fluide de (1) ; $p' - p = - \rho_I g\ (h' - h)$

(2) ; $p' - p = - \rho_2 g\ (h' - h)$

L'égalité $\rho_I g\ (h' - h) = \rho_2 g (h' - h)$ exige que

$$h' - h = 0 \text{ car } \rho_I \neq \rho_2$$

Donc tous les points de la surface de séparation sont dans un même plan horizontal et la pression y est uniforme. Pour des raisons de stabilité de l'équilibre, les fluides non miscibles se superposent par ordre de masse volumique décroissante.

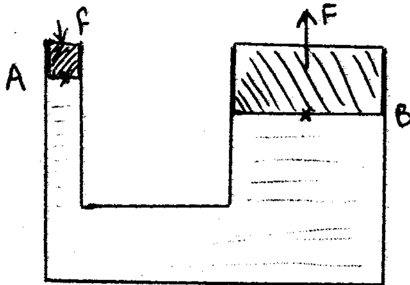
4) <u>Théorème de Pascal</u> : Dans un fluide incompressible en équilibre, les pressions se transmettent intégralement. Dans un fluide incompressible en équilibre, on a : $p_2 - p_I = - \rho g\ (h_2 - h_I)$

Si en M_I, la pression devient $p_I + \Delta p_I$, en M_2 elle prend la valeur $p_2 + \Delta p_2$ et on a :

$$(p_2 + \Delta p_2) - (p_I + \Delta p_I) = -\rho g(h_2 - h_I) = p_2 - p_I = Cte$$

soit $\Delta p_2 = \Delta p_I$

Application : presse hydraulique



Une force f exercée sur une surface s produit un accroissement de pression $p_A = \frac{f}{s}$

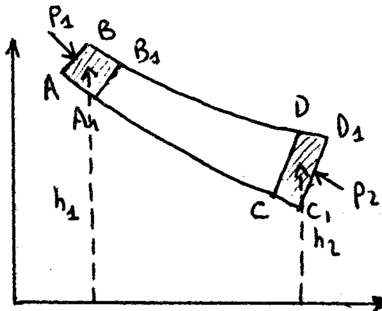
La pression en B augmente donc de $\frac{f}{s} = \frac{F}{S}$

La force totale exercée sur le piston de section S est égale à

$F = p_B S = f\frac{S}{s}$. On a ainsi multiplié la force f par le rapport $\frac{S}{s}$. On peut ainsi construire des vérins hydrauliques exerçant des forces de poussée de plusieurs centaines de tonnes.

5) On appelle la quantité $p + \rho gh = p^*$: elle représente l'énergie mécanique d'un volume unité du fluide incompressible en équilibre.

En effet considérons un fluide incompressible en équilibre dans le champ de pesanteur et isolons une portion de fluide ABCD. Faisons déplacer très lentement ABCD en le faisant venir en $A_I B_I C_I D_I$.



Au cours de ce déplacement infiniment lent, le travail éventuel des forces de frottement est nul, la vitesse de déplacement étant infiniment petite. A chaque instant, il y a équilibre entre les forces appliquées. Donc la somme des travaux est nulle : cette somme est la somme du travail des forces de pesanteur et du travail des

forces de pression.

<u>Travail des forces de pesanteur</u> : il revient à transporter de la cote h_I à la cote h_2 la masse ρdV de fluide, dV étant le volume de l'élément ABA_IB_I ou CDC_ID_I.

Le travail correspondant est

$$\Delta W_I = \rho g dV \ (h_I - h_2)$$

<u>Travail des forces de pression</u> : il est égal à

$$\Delta W_2 = p_I dV - p_2 dV$$

soit $\Delta W_I + \Delta W_2 = 0$

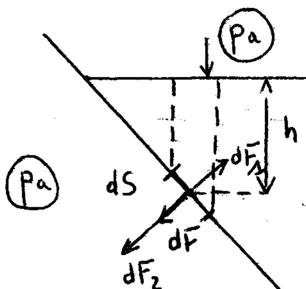
$$\text{d'où } p_2 + \rho g h_2 = p_I + \rho g h_I = Cte$$

Le principe de conservation de l'énergie conduit donc aux équations fondamentales de l'hydrostatique. En effet $p^* = p + \rho gh$ représente <u>l'énergie mécanique</u> par unité de volume du fluide incompressible en équilibre : cette énergie est uniquement potentielle : énergie de pression et énergie dûe à la pesanteur. Leur somme ne varie pas quand on considère des points différents du fluide.

I-2 b) <u>Résultante des forces de pression exercées par un fluide</u> :

I-2 b I) <u>Forces s'exerçant sur une paroi plane</u> :

Considérons un élément de paroi dS à la profondeur h, au-dessous de la surface libre du liquide. Soit Pa la pression atmosphérique. Cet élément est soumis aux 2 forces élémentaires dF_I et dF_2 normales à dS et de directions opposées.



$$dF_I = Pa \ dS$$

$$dF_2 = (Pa + \rho gh) \ dS$$

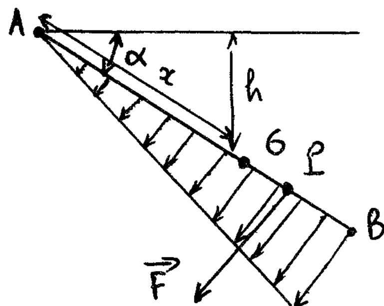
d'où la résultante

$$dF = dF_2 - dF_I = \rho gh \ dS$$

$$\boxed{dF = \rho gh \ dS} \qquad (8)$$

La paroi étant plane, les forces élémentaires qui s'exercent sur chaque élément sont toutes paral-

lèles et de même sens. Leur système est équivalent à une force unique dont l'intensité est égale à :



$$F = \int_A^B dF = \int_A^B \rho g h \, dS$$
$$= \rho g \int_A^B h \, dS$$

On voit que ce calcul est identique à celui que l'on fait quand on cherche à déterminer la position du centre de gravité d'une surface plane.

On a $\int_A^B h \, dS = h_G S$ $\qquad h_G$ = profondeur du centre de gravité de la surface d'une S.

Soit $\boxed{F = \rho g S h_G}$ (9)

La poussée exércée sur une surface plane par un fluide pesant en équilibre est égale au poids d'une colonne de fluide ayant pour base la surface de la paroi et pour hauteur la profondeur du centre de gravité de la surface libre.

Le point d'application P de la résultante s'appelle centre de poussée. Déterminons sa position en appliquant le théorème des moments (la somme des moments de toutes les forces dF doit être égale à un moment de la résultante F).

Considérons le moment par rapport à la droite de trace A.

L'abscisse x_p=AP du centre de poussée est définie par :

$$\int_A^B x \, dF = x_p \int_A^B dF$$

Soit $\int_A^B x \rho g h \, dS = x_p \int_A^B \rho g h \, dS$

$h = x \sin\alpha$ d'où $\int_A^B x^2 \sin\alpha \, dS = x_p \int_A^B x \sin\alpha \, dS$

$$\text{soit} \quad x_p = \frac{\int_A^B x^2 \, dS}{\int_A^B x \, dS} = \frac{\int_A^B x^2 \, dS}{x_G \, S} \qquad \text{(10)}$$

x_G étant l'abscisse du centre de gravité G

$\int_A^B x^2\, dS$ est le moment d'inertie I de la surface supposée constituée par un solide de masse surfacique unité par rapport à l'axe horizontal passant par A.

Appliquons le théorème de Huyghens :

$$I = I_G + S\, x_G^2$$

I_G étant le moment d'inertie de la paroi par rapport à l'axe horizontal passant par le centre de gravité

soit
$$\boxed{x_p = x_G + \frac{I_G}{S x_G}} \qquad \text{(II)}$$

x_p et x_G ne sont pas confondus et P est toujours en dessous de G par rapport à la surface libre du liquide.

De même, en considérant le moment des forces/plan de la surface libre :

$$h_p = \frac{\int_A^B h^2\, dS}{\int_A^B h\, dS} = \frac{\int_A^B h^2\, dS}{h_G\, S}$$

$$h_p = h_G + \frac{I'_G}{S h_G}$$

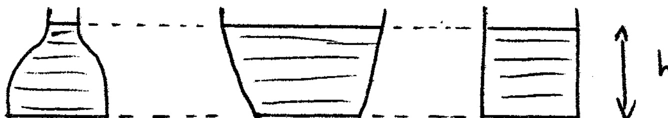
I'_G = moment d'inertie de la surface AB par rapport au plan horizontal passant par G

Remarque : si la pression qui s'exerce sur la paroi est différente de celle qui règne au dessus de la surface libre, les résultats précédents ne sont plus valables. Dans ce cas la force élémentaire dF est égale à :

$$dF = (p_a - p'_a)\, dS + \rho g h\, dS$$

Applications: I) Pression sur le fond horizontal d'un vase : Paradoxe hydrostatique.

Considérons 3 vases de formes différentes, mais dont les fonds ont même surface S, remplis du même liquide, à la même hauteur h.

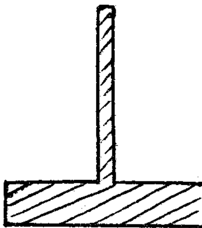


Les trois fonds supportent le même effort (relation 9)

$$F = \rho g h S$$

Ainsi avec un poids ds liquide relativement faible, on peut exercer sur le fond d'un vase, comme sur les parties les plus basses des parois latérales, un effort considérable capable de provoquer la rupture du vase.

Considérons par exemple, un cylindre vertical dont la base horizontale mesure I m^2 et la hauteur Icm surmonté d'un long tube dont la section est I cm^2.



Le cylindre contient IO litres d'eau. Mais en versant ensuite I/2 l d'eau dans le tube, le niveau s'élève de 5 m et la force qui s'exerce sur le fond passe de

$$\rho g h S = 10^3\ 9{,}809 \times 10^{-2} \times 1$$

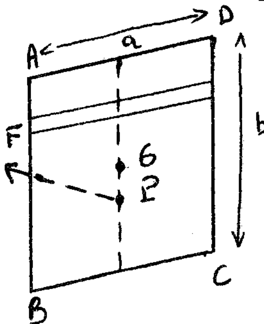
$$\simeq 100\ N \simeq 10\ kgf$$

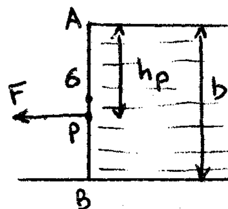
à $5\ 10^4$ N = 5 000 kgf

L'expérience a été réalisée par Pascal (expérience du tonneau de Pascal) : Un tonneau est surmonté d'un long tube. Il suffit de verser dans le tube un volume d'eau insignifiant pour faire éclater le tonneau.

2) Forces de pression sur une paroi plane verticale :

Considérons une paroi verticale rectangulaire dont le côté horizontal AD est dans le plan de la surface libre.





$$F = \rho g\ a\ b\ \frac{b}{2} = \rho g\ a\ \frac{b^2}{2}$$

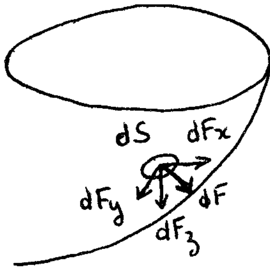
$$h_p = \frac{\int_A^B h^2\ dS}{\int_A^B h\ dS} = \frac{a\int_A^B h^2\ dh}{h_G\ S}$$

$$h_p = \frac{a\left[\frac{h^3}{3}\right]_0^b}{\frac{b}{2}\ ab} = \frac{2}{3}\ b$$

Le centre de poussée est situé aux 2/3 de la profondeur de la plaque.

I-2 b 2) Forces de pression sur une paroi quelconque :

On définira la résultante des forces de pression en projetant chaque élément dF sur trois axes de coordonnées x, y, z par exemple.



On a $dF = \rho gh\ dS$ (relation8)

$dF_x = \rho gh\ dS_x$

dS_x étant la projection de la surface dS sur un plan normal à la direction x.

De même on a $dF_y = \rho gh\ dS_y$

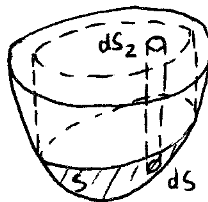
$dF_z = \rho gh\ dS_z$

et $F_x = \int dF_x = \rho g \int h\ dS_x$

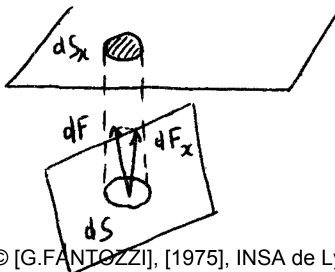
ainsi que des relations identiques pour F_y et F_z.

REMARQUE I : La projection sur une direction verticale de la résultante des poussées élémentaires ou poussée verticale est égale en grandeur au poids d'une colonne de fluide cylindrique verticale s'appuyant sur la surface S.

$$F_z = \rho g \int h\ dS_z$$



REMARQUE II : Cas de pressions uniformes dans tout le fluide (Fluide non pesant)



La force élémentaire est

$dF = p\ dS$

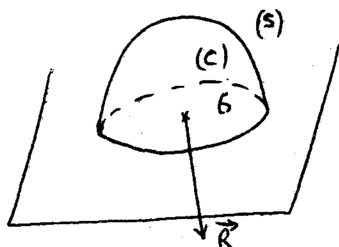
$dF_x = p\ dS \cos\alpha = p\ dS_x$

et $F_x = p \int dS_x$

La résultante des forces de pression suivant une direction sur

une surface gauche S soumise à une pression uniforme est égale à la force de pression uniforme qui s'exerce sur la projection de la surface perpendiculairement à cette direction.

- Dans le cas d'une surface (S) limitée par une courbe plane (C), la résultante des forces de pression $\vec{R}$ est égale à la force de pression s'exerçant sur la paroi plane intérieure à (C).



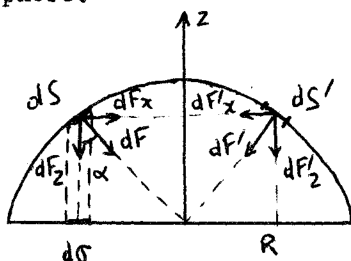
- Si on considère la surface fermée par (S) et la paroi plan intérieur à (C), la résultante des forces de pression est nulle (la projection suivant une direction de la surface est nulle: il y a autant de termes positifs que négatifs pour dS_x)
- Il en est de même pour toute surface fermée.

<u>CAS PARTICULIER</u> : surface sphérique

Considérons une demi-sphère de rayon R soumise sur l'une de ses faces à une pression uniforme p (fluide non pesant). Pour calculer la résultante des forces de pression, nous isolons deux éléments dS et dS' de surface identique et symétrique par rapport à l'axe de révolution Oz de l'hémisphère.

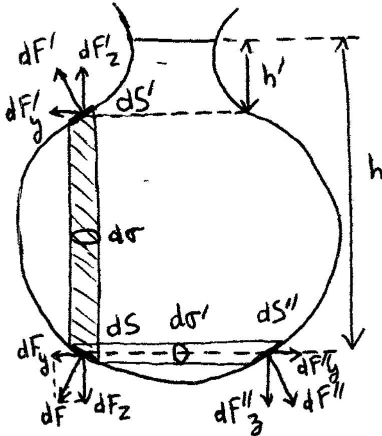
Si nous décomposons les forces $dF = p\ dS$ et $dF' = p\ dS'$ de la façon indiquée par la figure, on voit que la résultante des forces de pression se réduit à :

$$F = \int dF_z = \int p\ dS \cos\alpha = p \int d\sigma = p \pi R^2$$



I-2 b 3) <u>Résultante des forces de pression exercées par un liquide sur l'ensemble des parois d'un vase</u> :

Les forces de pression exercées par un liquide sur l'ensemble des parois d'un vase admettent une résultante unique qui est verticale, dirigée de haut en bas et <u>égale au poids du liquide</u>.



Considérons un cylindre élémentaire de section droite $d\sigma$ découpant les surfaces dS et dS' sur les parois du vase.

On a $dF = \rho gh\, dS$

$dF' = \rho gh'\, dS'$

et $dF_z = \rho\, gh\, dS_z = \rho gh\, d\sigma$

$dF'_z = \rho gh'\, d\sigma$

soit $dF_z - dF'_z = \underbrace{\rho g(h-h')\, d\sigma}_{\text{poids du liquide de la colonne}}$

Si nous considérons d'autre part une colonne horizontale de liquide, le même raisonnement que ci-dessus nous conduit à écrire (voir figure) :

$$dF_y - dF''_y = \rho g\ (h-h)\ d\sigma' = 0$$

Les deux composantes dF_y et dF''_y se font équilibre.

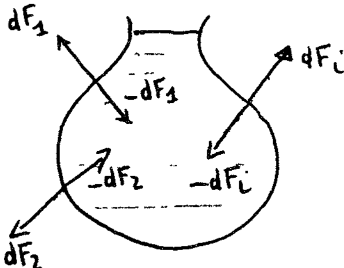
Par suite, la résultante générale des forces de pression n'a pas de composante horizontale : elle est verticale.

Sa valeur est égale à :

$$F = \int_S dF_z - dF'_z = \int_S \rho g\ (h-h')\ d\sigma$$

Elle est égale à la somme des poids de liquide des colonnes élémentaires donc égale au poids total du liquide contenu à l'intérieur du récipient.

<u>REMARQUE I</u> : Ce résultat peut être démontré différemment. Le liquide exerce des actions normales dF_I, dF_2, ...dF_i... sur les éléments de paroi.



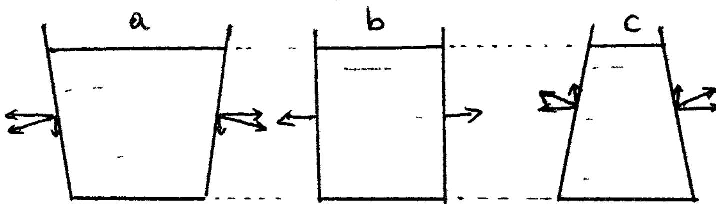
Inversément les divers éléments de paroi exercent sur le liquide des forces : $-dF_I$, $-dF_2$, ... $-dF_i$...

Le liquide est en équilibre sous l'action de son poids P et des forces $-dF_I$, $-dF_2$, ... $-dF_i$ ...

Les forces $- dF_1, - dF_2, \ldots - dF_i$ ont donc une résultante égale et opposée au poids P, et par conséquent les forces $dF_1 \ldots dF_i \ldots$ ont une résultante égale au poids P du liquide.

REMARQUE II : Paradoxe hydrostatique :

Nous pouvons maintenant expliquer pourquoi la résultante F des forces de pression sur le fond horizontal d'un vase diffère en général du poids P du liquide contenu dans le vase (égal à la résultante des forces de pression sur l'ensemble des parois).



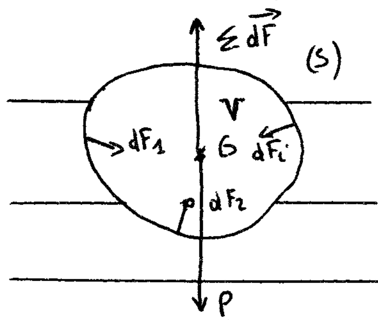
Pour le vase b, les forces de pression sur les parois latérales sont horizontales et ont une résultante nulle. On a donc F = P.
Pour les vases a et c, les forces de pression sur les parois latérales ont une résultante verticale V et l'on a :

vase a $\quad P = F + V \quad$ soit $\quad P > F$

vase c $\quad P = F - V \quad$ soit $\quad P < F$

I-2 b 4) Résultante des forces de pression sur solide immergé - Théorème d'ARCHIMEDE :

Considérons un système de fluides non miscibles en équilibre et isolons un volume V de ce fluide au moyen d'une surface S.
Ce volume est en équilibre sous l'action :



- des forces $\Sigma \overrightarrow{dF}$ exercées par le fluide extérieur agissant sur les éléments de la surface (S).
- des forces de pesanteur qui admettent une résultante $\overrightarrow{P}$ égale au poids du fluide enfermé par S.

$\Sigma \overrightarrow{dF} + \overrightarrow{P} = 0 \qquad \Sigma \overrightarrow{dF} = - \overrightarrow{P}$

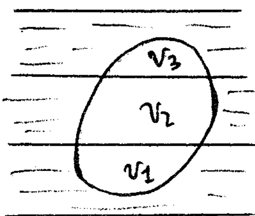
Si on remplace le fluide à l'intérieur de la surface (S) par un solide, les forces extérieures resteront inchangées.
Donc les forces de pression exercées par un système de fluides en équilibre sur un solide complètement immergé se réduisent à une force unique directement opposée au poids des fluides déplacés et passant par le centre de gravité G du fluide déplacé (centre de poussée).
Cette résultante s'appelle la poussée.

REMARQUE : I) Le théorème d'ARCHIMEDE n'est pas applicable si les fluides ou les corps immergés sont en mouvement.

II) Le théorème concerne les actions sur une surface fermée S. Cette surface doit être tout entière à l'intérieur des fluides en équilibre. Le théorème d'ARCHIMEDE ne s'applique donc pas à un corps solide qui n'est pas entouré de toutes parts par des fluides en équilibre.

Réciproque du théorème d'ARCHIMEDE

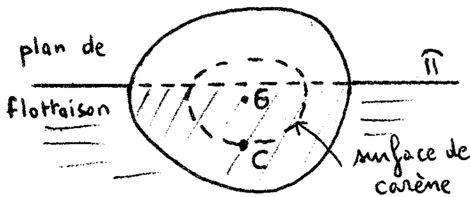
Considérons un récipient contenant plusieurs liquides non miscibles en équilibre et un corps solide immergé.



Soit v_I, v_2 et v_3 les volumes des 3 liquides déplacés.
Les surfaces de séparation s'élèvent ainsi que la surface libre. Par conséquent, les forces de pression agissant sur les parois du vase augmentent de la même manière que si l'on avait versé dans le vase les 3 volumes v_I, v_2 et v_3 des liquides.
Leur résultante s'accroît donc du poids des volumes v_I, v_2 et v_3 des liquides déplacés par le solide.
Donc si on immerge un corps solide dans un système de fluides en équilibre, la résultante des forces de pression exercées par les fluides sur les parois du vase augmente d'une quantité égale au poids total des fluides déplacés.

I-2 c) Equilibre des corps flottants :

Définitions : Considérons un solide immergé dans un liquide en équilibre (flotteur). Ce solide ne pourra être en équilibre dans le liquide que si son poids est $\leqslant$ poids du volume du liquide qu'il peut déplacer.



Le fluide déplacé est constitué par le liquide situé au dessous du plan Π de la surface libre du liquide (on néglige le poids de l'air déplacé au dessus de Π).

Le flotteur sera en équilibre si :

-I- $P = V\rho g$ V = volume du liquide déplacé.

-2- Les 2 forces P et poussée d'ARCHIMEDE doivent avoir la même ligne d'action (verticale donc perpendiculaire à Π).

La condition I détermine le volume immergé du flotteur. On appelle plan de flottaison tout plan Π découpant dans le flotteur un volume égale à V. La section du flotteur par un tel plan est une flottaison.

Le volume immergé du flotteur (volume situé au dessous du plan de flottaison) est la carène.

La poussée de liquide passe par le centre de gravité (ou d'inertie) C du volume de la carène supposé rempli de liquide (donc homogène) : ce point s'appelle centre de carène ou centre de poussée.

Le centre de poussée ne doit pas être considéré comme le point d'application de la poussée.

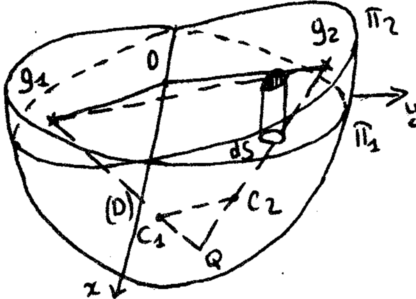
Quand le plan de flottaison Π varie, C décrit par rapport au solide une surface fermée dite surface de carène.

La condition 2 exige que le centre de carène C et le centre d'inertie G du flotteur soit sur une même normale au plan de flottaison .

Théorème de DUPIN : Le plan tangent en C à la surface de carène est parallèle au plan de flottaison Π.

Soient en effet deux déplacements isocarènes infiniment voisins (2 flottaisons limitent des carènes de même volume : condition I),

$C_I C_2$ les positions respectives des centres de carène et $\Pi_I \Pi_2$ les plans de flottaison correspondant.



Les volumes immergés ont une partie commune dont le centre d'inertie est Q. Les parties non communes sont constituées par 2 petits onglets compris entre les 2 plans Π_I et Π_2, de même volume v et de centres d'inertie g_I et g_2.

C_I centre d'inertie du volume commun augmenté de l'onglet I est sur la droite Qg_I. C_2 est sur la droite QG_2 et on a les relations :

$$\frac{QC_I}{Qg_I} = \frac{v}{V} = \frac{QC_2}{Qg_2} \qquad (I2)$$

V = volume de la carène (liquide déplacé : volume commun +v)
$C_I C_2$ est donc parallèle à $g_I g_2$ (triangles semblables). Si on fait tendre C_2 vers C_I, il est clair que le plan tangent à la surface de carène est parallèle au plan de flottaison.
La poussée qui passe par le centre de poussée est normale en ce point à la surface de carène et pour déterminer les positions d'équilibre du flotteur on est ramené à mener du centre d'inertie du flotteur les normales à la surface de carène.

<u>REMARQUE</u> : Si le plan Π_I est horizontal et si on fait tourner le plan Π_2, le point C_2 sera toujours légèrement au dessus de C_I (car g_2 est au dessus de g_I). Par conséquent, la surface de carène est convexe.

<u>Théorème d'EULER</u> : L'intersection de 2 flottaisons isocarènes infiniment voisines passe par le centre de gravité de chacune des flottaisons.
Considérons en effet deux axes Ox et Oy dans le plan Π_I, Ox étant l'intersection de Π_I et Π_2 . Soit $d\Omega$ l'angle de ces 2 plans.

Les deux onglets ont même volume :

pour l'onglet I : $v_I = - \iint_{S_I} y \, d\theta \, dS$

" 2 : $v_2 = \iint_{S_2} y \, d\theta \, dS$

$v_I = v_2$ soit $d\theta \iint_S y \, dS = 0$

Or $\iint_S y \, dS = y_G \, S = 0$ y_G étant l'ordonnée du centre de gravité de la flottaison. Donc $y_G = 0$. Le centre de gravité de la flottaison est donc situé sur l'intersection des 2 flottaisons. Nous prendrons l'origine O en ce centre de gravité (l'intersection des 2 flottaisons est appelée droite caractéristique D).

<u>Déplacement du centre de carène</u> :

On a les relations suivantes :

$$\frac{\overrightarrow{C_I C_2}}{\overrightarrow{y_I y_2}} = \frac{v}{V}$$

Soient S_2 la partie de S correspondant à l'onglet 2

S_I " " " I

g_I et g_2 étant les centres de gravité des 2 onglets :

$$v \, \overrightarrow{Og_I} = -d\theta \iint_{S_I} \overrightarrow{OM} \, y \, dS$$

M étant un point intérieur à dS.

$$v \, \overrightarrow{Og_2} = d\theta \iint_{S_2} \overrightarrow{OM} \, y \, dS$$

$$\text{soit } v \, \overrightarrow{g_I g_2} = d\theta \iint_S \overrightarrow{OM} \, y \, dS$$

Si $d\varepsilon$, $d\eta$, $d\xi$ sont les coordonées de $\overrightarrow{C_I C_2}$, on a donc

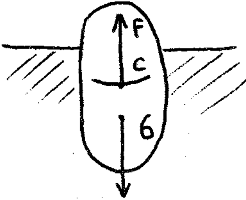
(I3)
$$\begin{cases} V \, d\varepsilon = d\theta \iint_S xy \, dS \\ V \, d\eta = d\theta \iint_S y^2 \, dS = I_x \, d\theta \\ V \, d\xi = 0 \end{cases}$$

I_x = moment d'inertie de la flottaison/droite caractéristique Ox

$V \, d\xi = 0$ (le plan tangent en C à la surface de carène étant parallèle au plan de flottaison).

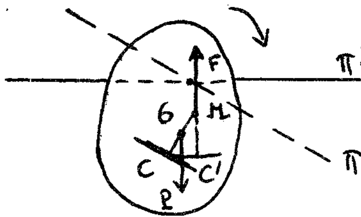
Stabilité de l'équilibre :

A l'équilibre, la poussée F et le poids P doivent être égaux et opposés.



Les directions de poussée sont donc obtenues en menant de G les normales à la surface de carène. Comme d'un point on peut mener plusieurs normales à une surface fermée (nombre pair), il y a donc plusieurs positions d'équilibre du flotteur : certaines sont stables, d'autres sont instables.

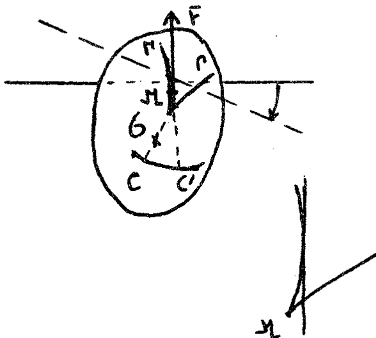
Soit C la position du centre de carène correspondant à une position d'équilibre. Ecartons un peu le flotteur de sa position d'équilibre dans le plan de figure (roulis).



Par rapport au solide le plan de flottaison tourne autour d'une droite D. Dans la nouvelle position, le centre de carène est C'.

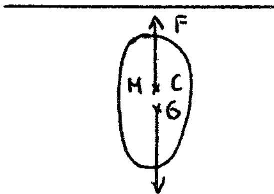
La poussée a pour direction la normale en C' à la surface de carène.

Le centre de gravité G est situé sur la normale en C (position d'équilibre). Les 2 normales en C et C' se coupent en un point M dit métacentre.



Lors des déplacements du flotteur, la poussée F reste tangente à une courbe Γ qui à cause de la symétrie de la carène présente un point de rebroussement en M sur la droite CG. La courbe Γ est la développée de la courbe des centres de poussées (normales à la surface des poussées enveloppent Γ).

Quand l'angle $d\theta$ est faible, le point de contact de F avec Γ est voisin de M : distance de M à la poussée π' est un infiniment petit du 3ème ordre / $d\theta$. Donc on peut admettre que la poussée est appliquée au point M fixe par rapport au flotteur.
Le métacentre M joue pour l'équilibre du flotteur le rôle du centre de poussée pour l'équilibre du corps immergé.



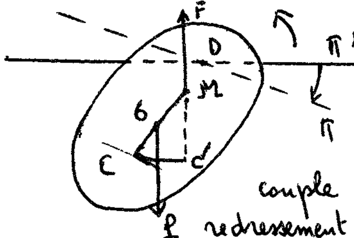
Le point C est alors fixe et C et M sont confondus.
L'équilibre est stable si M est au dessus de G.

La poussée est appliquée au métacentre M . La position du métacentre M peut être déterminée à l'aide des relations (I3).

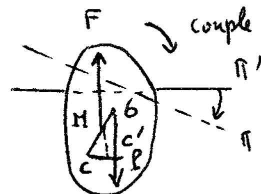
$CC' = r\, d\theta = d\eta$, r étant la longueur CM (=rayon de courbure en C)

soit $\boxed{r = \frac{d\eta}{d\theta} = \frac{I_D}{V}}$ (I4) I_D : moment d'inertie par rapport à l'axe D de la flottaison S.

Si G est au dessous de M, le flotteur est soumis à un couple formé par le poids et la poussée d'ARCHIMEDE qui tend à ramener le flotteur à sa position d'équilibre : équilibre stable.



Si G est au-dessus de M, le couple tend à l'écarter davantage de sa position d'équilibre : équilibre instable.



La condition de stabilité s'écrit donc :

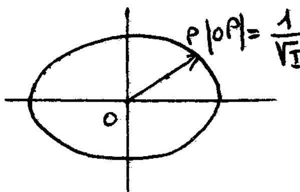
$\boxed{r-a > 0}$ M au-dessus de G

a = CG r - a = GM = hauteur métacentrique

<u>REMARQUE</u> : On a considéré ici un mouvement de roulis (droite D est un axe longitudinal). On pourrait considérer un mouvement de tangage (droite D est un axe transversal). Le métacentre serait alors M_2 défini par

$$r_2 = \frac{I_2}{V}$$

Il existe une infinité de métacentres correspondant aux différentes orientations de la droite D. Si I_I et I_2 ($I_I > I_2$) sont les moments d'inertie principaux de la flottaison. Le rayon r varie entre $\frac{I_2}{V}$ et $\frac{I_I}{V}$ et dans ce cas la direction CC' est perpendiculaire à la droite D. En effet pour les axes principaux d'inertie au point O, les produits d'inertie sont nuls et par conséquent $d\mathcal{E} = 0$ donc CC' est perpendiculaire à la droite D.



Pour un axe d'inclinaison quelconque, le métacentre M sera situé entre M_I et M_2 définis pour $r_I = \frac{I_I}{V}$ et $r_2 = \frac{I_2}{V}$.

L'équilibre sera absolument stable si

$$\boxed{r_I - a > 0} \quad \text{ou } CG < r_I$$

Si G est entre M_I et M_2 : équilibre mixte : stable pour certains axes d'inclinaison, instable pour d'autres

Si G est au-dessus de M_2 : équilibre absolument instable.

<u>CONSEQUENCES</u> : On augmentera la stabilité d'un flotteur en abaissant son centre de gravité ou en élevant le métacentre c'est à dire en augmentant le moment d'inertie I : on obtient ce résultat en munissant les pirogues de un ou deux balanciers ou en munissant un hydravion de flotteurs en bout d'aile.

I-3 <u>Statique des fluides dans d'autres champs de forces</u> :

On a toujours l'équation (2)

$$\boxed{\rho\vec{F} - \overrightarrow{grad}\, p = 0} \qquad (2)$$

F étant l'intensité des forces de volume par unité de masse du fluide. On peut écrire : $\vec{F} = \vec{f} + \vec{f}_p$

$\vec{f}_p$ représentant les forces de pesanteur $\vec{f}_p = -\overrightarrow{grad}\,(gh)$

$\vec{f}$ " les forces de volume autre que les forces de pesanteur

Pour un fluide incompressible, on peut écrire :

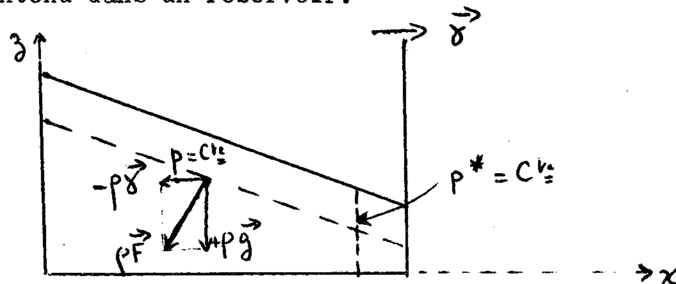
$$\boxed{p^* = p + \rho gh} \qquad (15)$$

et l'equation (2) devient :

$$\boxed{\rho\vec{f} = \overrightarrow{grad}\,p^*} \qquad (16)$$

On voit donc que, d'une part, la force $\vec{F}$ est perpendiculaire à la surface $p = Cte$ alors que la force $\vec{f}$ est perpendiculaire à la surface $p^* = Cte$.

EXEMPLE I - Equilibre d'un liquide soumis à une accélération constante. Soit γ l'accélération à laquelle est soumis le liquide contenu dans un réservoir.



L'unité de volume du liquide est soumise, d'une part à la force de pesanteur $+\rho\vec{g}$ et à la force d'inertie $-\rho\vec{\gamma}$

D'où $\rho\vec{F} = -\rho\vec{\gamma} + \rho\vec{g}$

($F_0 = -M\gamma$) force fictive dans le référentiel non inertiel voir BERKELEY Mécanique p. 75 et 76

Projetons la relation (2) sur les axes Ox et Oz.

$$-\rho\gamma - \frac{\partial p}{\partial x} = 0$$

$$-\rho g - \frac{\partial p}{\partial z} = 0$$

Soit $\quad dp = \frac{\partial p}{\partial x}\,dx + \frac{\partial p}{\partial z}\,dz = -\rho\gamma\,dx - \rho g\,dz$

Les surfaces d'égale pression (p= Cte) sont celles pour lesquel-

les $dp = 0$ soit

$$-\rho\gamma dx - \rho g\, dz = 0 \quad \text{ou} \quad -\rho\gamma x - \rho g\, z = Cte$$

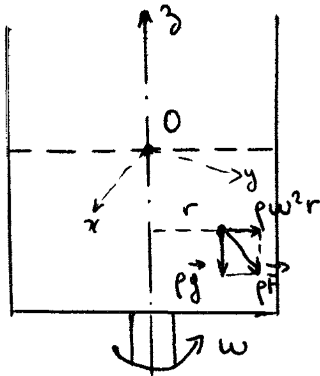
soit $$z = -\frac{\gamma}{g}\, x + Cte$$

Ce sont des plans inclinés perpendiculaires à $\vec{F}$.

La surface libre (p = Cte = p. atm.) est donc également un plan.

D'autre part, $p^* = Cte$ pour $x = Cte$. Les surfaces $p^* = Cte$ sont des plans verticaux qui sont bien perpendiculaires à $\vec{f}$ dans ce cas : $\vec{f} = -\rho\vec{\gamma}$ $\quad (p^* = p + \rho gz = Cte$
$dp + \rho g\, dz = 0 \;\; dx = 0)$

<u>EXEMPLE 2</u> - Equilibre d'un liquide dans un cylindre tournant autour de son axe à <u>vitesse angulaire constante</u> ω.



Prenons l'axe des z suivant l'axe du cylindre et deux axes Ox et Oy liés au cylindre (référentiel non inertiel).

Le liquide (unité de volume) est soumis à son poids $-\rho g$ et à la force centrifuge horizontale qui vaut $\rho\omega^2 r$: $\rho\vec{F} = -\rho\vec{g} + \rho\omega^2 r$

Le liquide est au repos dans le référentiel non inertiel.

On peut donc écrire :

$$F + F_0 = M\, a \qquad\qquad F = M\,(a + a_0)$$

F = force appliquée $\qquad F_0 = -M\, a_0$

a = accélération du corps dans le référentiel non inertiel
ici $a = 0$

a_0 = accélération du référentiel non inertiel = $-\omega^2 r$
F_0 = force fictive ou speudo-force = force centrifuge

Projetons l'équation (2) sur chacun des axes :

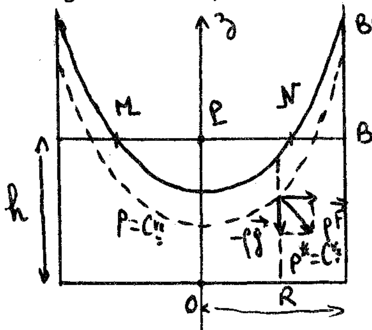
On a : $$\rho\omega^2 x - \frac{\partial p}{\partial x} = 0$$
$$\rho\omega^2 y - \frac{\partial p}{\partial y} = 0$$
$$-\rho g - \frac{\partial p}{\partial z} = 0$$

On a donc :
$$dp = \frac{\partial p}{\partial x}\,dx + \frac{\partial p}{\partial y}\,dy + \frac{\partial p}{\partial z}\,dz$$
$$= \rho\omega^2 x\,dx + \rho\omega^2 y\,dy - \rho g\,dz$$

En intégrant, on trouve :
$$p = \rho\omega^2 \frac{x^2}{2} + \rho\omega^2 \frac{y^2}{2} - \rho g z + Cte$$

Les surfaces isobares correspondent à p = Cte soit :
$$\rho\omega^2\left(\frac{x^2}{2} + \frac{y^2}{2}\right) - \rho g z = Cte$$
$$\text{soit} \quad z = \frac{\omega^2 r^2}{2g} + Cte$$

Ce sont des paraboloïdes de révolution dont l'axe est l'axe Oz. (orthogonaux à $\vec{F}$). La surface libre est un paraboloïde.



Les surfaces p^* = Cte sont normales au vecteur $\rho\vec{f}$: ce sont des cylindres d'axe Oz :
$$p + \rho g z = \rho\omega^2 \frac{x^2}{2} + \rho\omega^2 \frac{y^2}{2} + Cte = Cte$$
$$\rho\omega^2 \frac{r^2}{2} = Cte$$

<u>EXERCICE</u> : Déterminer la constante du paraboloïde de la surface libre. On considère que le volume du liquide est constant : soit :
$$\int_0^R 2\pi r\,dr\left[\left(\frac{\omega^2 r^2}{2g}\right) + Cte\right] = h\pi R^2$$
$$C\pi R^2 = h\pi R^2 - \frac{\pi\omega^2}{g}\,\frac{R^4}{4}$$
$$C = h - \frac{\omega^2}{g}\,\frac{R^2}{4}$$

Montrer que PP' = BB' et que la surface libre passe par le cercle de diamètre $MN = \frac{2R}{\sqrt{2}}$, quelque soit ω.
$$z = \frac{\omega^2 r^2}{2g} + Cte$$
$$r = 0 \qquad z = h - \frac{\omega^2}{g}\,\frac{R^2}{4}$$

$$r = R \qquad z = \frac{\omega^2 R^2}{2g} + h - \frac{\omega^2}{g}\frac{R^2}{4} = h + \frac{\omega^2}{g}\frac{R^2}{4}$$

$$P'P = h - h + \frac{\omega^2}{g}\frac{R^2}{4} = \frac{\omega^2}{g}\frac{R^2}{4}$$

$$BB' = h + \frac{\omega^2}{g}\frac{R^2}{4} - h = \frac{\omega^2}{g}\frac{R^2}{4}$$

M et N sont définis par $z = h$ soit $\not{h} = \frac{\omega^2 r^2}{2g} + \not{h} - \frac{\omega^2 R^2}{g4}$

$$r^2 = \frac{R^2}{2} \qquad \boxed{r = \frac{R}{\sqrt{2}}}$$

I-4 Statique des fluides compressibles dans le champ de pesanteur

I-4 I) Définition du coefficient de compressibilité

Si le fluide est compressible, sa masse volumique dépend de la pression est de la t° du fluide. Elle sera donnée par l'équation thermodynamique du fluide : $\rho = f\ (p,T)$

Si le fluide subit une transformation isotherme (T = Cte) infiniment petite, on définira le coefficient de compressibilité isotherme X_T par la relation :

$$\frac{d\sigma}{\sigma} = - X_T \, dp \qquad (I7)$$

$$\text{ou} \quad \frac{d\rho}{\rho} = X_T \, dp$$

σ étant le volume massique : $\sigma = \frac{I}{\rho}$ (volume occupé par l'unité de masse)

Pour les liquides, X_T est de l'ordre de IO^{-IO} dans le système S.I.

eau : $X_T = 5.IO^{-IO}$ ($5.IO^{-5}$ cm^2/Kgf)

mercure : $X_T = 4.IO^{-II}$ ($4.IO^{-6}$ cm^2/Kgf)

Une augmentation de pression de I kgf/cm^2 = IO^6 baryes ($dyne/cm^2$)

= IO^5 Pa

diminue le volume de $5.IO^{-IO}.IO^{+5} = 5.IO^{-5} = \frac{I}{20\ 000}$ de sa valeur pour l'eau, de $4.IO^{-6}$ soit $\frac{I}{250\ 000}$ pour le mercure.

Les variations de volume sont donc très faibles et la statique des fluides incompressibles est donc une bonne approximation pour la plupart des liquides réels.

Les variations de volume sont assez petites pour qu'on puisse con-

sidérer que X_T est indépendant de la pression :

$$\frac{d\rho}{\rho_0} = X_T \, dp \qquad \rho_0 \text{ : masse volumique sous la pression } p_0$$

En intégrant cette relation : $\rho = \rho_0 + X_T \rho_0 (p - p_0)$

$$\sigma = \sigma_0 - X_T \sigma_0 (p - p_0)$$

Les gaz sont beaucoup plus compressibles que les liquides.
Pour un gaz parfait, la loi de compressibilité isotherme est la loi de Mariotte : $pv = Cte$.
Ainsi pour une transformation isotherme, on a :

$$p \, dv + v \, dp = 0$$

$$X_T = - \frac{I}{v} \frac{dv}{dp} = \frac{I}{p}$$

A la pression atmosphérique : $X = IO^{-5}$ MKSA : il est 20 000 fois supérieur à celui de l'eau.
Lorsqu'on comprime un fluide, la compression n'est pas en général isotherme. Dans une compression ou détente rapide, le fluide n'a pas le temps d'échanger de chaleur avec le milieu environnant : $dQ = 0$. On définit le coefficient de compressibilité adiabatique X_Q de la même manière.
On démontre en thermodynamique que :

$$\gamma = \frac{X_T}{X_Q} = \frac{C_p}{C_v} \qquad \text{Pour un gaz parfait } X_Q = \frac{X_T}{\gamma} = \frac{I}{\gamma p}$$

Pour une transformation adiabatique élémentaire :

$$- \frac{I}{v} \frac{dv}{dp} = \frac{I}{\gamma p} \qquad \frac{dp}{p} + \gamma \frac{dv}{v} = 0$$

si $\gamma = Cte$, pour une transformation finie on trouve par intégration : $\ln p + \ln v^{\gamma} = Cte$ ou $\ln pv^{\gamma} = Cte$

soit $\boxed{pv^{\gamma} = Cte}$ <u>loi de LAPLACE</u> (I8)

$\gamma \simeq I,66$ gaz monoatomiques : A

$\gamma \simeq I,4$ " diatomiques : O_2, N_2...

γ I,I à I,4 liquides

Les transformations adiabatiques s'accompagnent d'une variation de température, la compression produisant un échauffement du fluide. Cette variation est faible pour les liquides (qques $\frac{I}{IOO}$ degré

pour I atm.). Elle est plus importante pour les gaz.
Pour un gaz parfait, on a l'équation caractéristique $pv = RT$
En tenant compte de la loi de LAPLACE, on trouve :

$$p \frac{R^{\gamma} T^{\gamma}}{p^{\gamma}} = Cte \qquad p^{I-\gamma} T^{\gamma} = Cte$$

$$\text{ou} \quad \boxed{T = Cte\ p^{\frac{\gamma - I}{\gamma}}} \qquad \gamma > I$$

I-4 2) <u>Equation fondamentale</u>

L'équation (2) est toujours valable : $\rho \vec{F} - \text{grad}\, \vec{p} = 0$
mais ici ρ dépend de la cote et ne pourra plus entrer sous le signe dérivation.
Puisque $\vec{F}$ dérive du potentiel $V = g\,h$, on a donc : $\vec{F} = - \overrightarrow{\text{grad}}\ V$

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial p}{\partial x} + \rho \frac{\partial gh}{\partial x} &= 0 \\ \frac{\partial p}{\partial y} + \rho \frac{\partial gh}{\partial y} &= 0 \\ \frac{\partial p}{\partial z} + \rho \frac{\partial gh}{\partial z} &= 0 \end{aligned}\right\} \qquad (I9)$$

Si z est dirigé dans le même sens que h, on aura :

Les plans horizontaux sont des surfaces équipotentielles isobares et isothermes

$$\left\{\begin{aligned} \frac{\partial p}{\partial z} + \rho g &= 0 \\ \frac{\partial p}{\partial x} &= 0 \\ \frac{\partial p}{\partial y} &= 0 \end{aligned}\right. \qquad (I9bis)$$

La pression à la cote z sera donnée par :

$$p = p_o - \int_{z_o}^{z} \rho g\, dz \qquad (20)$$

p_o étant la pression à la cote z_o.

I-4 3) <u>Applications</u>

<u>Pression dans une colonne de liquide compressible</u>

Nous avons déterminé au § I-4 I) la variation de ρ avec p :

$$\rho = \rho_o + X_T \rho_o \ (p - p_o)$$

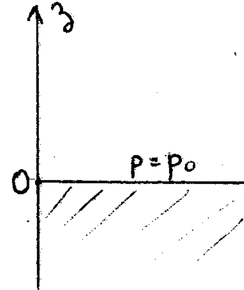
La relation (I9) s'écrit donc :

$$\frac{\partial p}{\partial z} = - \rho g = - \rho_o g \left[I + X_T \ (p - p_o) \right]$$

$$\frac{\partial(p - p_o)}{I + X_T(p - p_o)} = -\rho_o\, g\, dz$$

$$\frac{\partial\left[I + X_T\,(p - p_o)\right]}{I + X_T\,(p - p_o)} = -\rho_o\, g\, X_T\, dz$$

$$\ln \frac{\left[I + X_T\,(p - p_o)\right]}{C} = -\rho_o\, g\, X_T\, z$$



Si $p = p_o$ pour $z = 0 \Longrightarrow C = I$

Soit $I + X_T\,(p - p_o) = e^{-\rho_o g X_T z}$

$$p - p_o = \frac{I}{X_T}\,(+\, e^{-\rho_o g X_T z} - I)$$

Commme $X_T \ll I$, on peut utiliser un développement limité de l'exponentielle : $e^x = I + \frac{x}{I} + \frac{x^2}{2!} + \ldots \frac{x^n}{n!}$

$$p - p_o = \frac{I}{X_T}\,\left(-\rho_o g X_T z + \frac{(\rho_o g X_T z)^2}{2} + \ldots\right)$$

$$= -\rho_o g z\,\left(I - \frac{X_T \rho_o g z}{2} + \ldots\right)$$

Le premier facteur représente la pression du liquide s'il était incompressible.

EXEMPLE : pression en un point de la mer à 8 kilomètres de profondeur : $X_T = 5 \cdot I0^{-I0}$ $\rho_o = I020\ kg/m^3$ $g = 9{,}8I\ m/s^2$

$$-\rho_o g z = I020 \times 9{,}8I \times 8.I0^3 = 8.I0^7 Pa$$

$-\frac{X_T \rho_o g z}{2} = 2.I0^{-2}$ même à cette profondeur, la correction de pression due à la compressibilité est de2%

$$p - p_o = 8.I0^7\,(I + 2.I0^{-2})$$

Cas des gaz

En général, on peut considérer la pression et la t° d'un gaz dans un réservoir comme constantes car l'intégrale de l'équation (20) reste $\ll p_o$. Par contre pour des variations importantes de z (cas de l'atmosphère), cela n'est plus possible. Si on a affaire à un gaz parfait, son équation caractéristique s'écrit pour l'unité de

masse : $$p\sigma = r\,T = \frac{p}{\rho}$$

soit $$\frac{\rho}{\rho_0} = \frac{p}{p_0} \times \frac{T_0}{T}$$ ρ_0 masse volumique dans les conditions (p_0, T_0)

D'où $$\frac{dp}{dz} = -\rho g = -\rho_0\, g\, \frac{p}{p_0}\, \frac{T_0}{T}$$

$$\frac{dp}{p} = -\frac{\rho_0}{p_0}\, g\, \frac{T_0}{T}\, dz \qquad (22)$$

En général T est une fonction de z qu'il faut déterminer.

Atmosphère à t° constante $T = T_0$:

on a $$\frac{dp}{p} = -\frac{\rho_0 g}{p_0}\, dz$$

soit $$p = p_0\, e^{-\frac{\rho_0 g}{p_0} z}$$

Dans les conditions normales p_0 = I atm. = IO,IIO^4 Pa

T_0 = 273 °K $\rho_0 g$ = I,293 x 9,8I N/m^3

masse volumique à 0° C
air

$$\frac{\rho_0 g}{p_0} = \frac{I,293 \times 9,8I}{10,1 \times 10^4} = \frac{I}{8000}$$

soit $$p = p_0\, e^{-\frac{2}{8000}}$$

$$\rho = \rho_0\, e^{-\frac{2}{8000}}$$

$$dp = -p\,\frac{dz}{8000} \qquad \text{pour } p = p_0$$

$$dp = -\frac{10,1\ 10^4}{8000} = 12,65 \text{ Pa} \quad \text{pour } dz = I \text{ m}$$

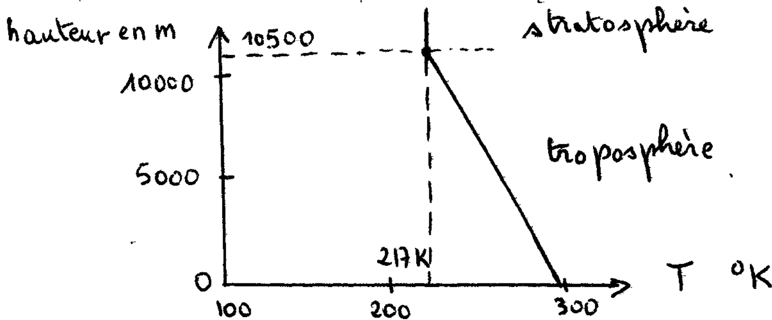
Atmosphère terrestre :

L'atmosphère ne peut être en équilibre que si les isobares sont aussi les surfaces isother es et coïncident avec les surfaces équipotentielles du champ de pesanteur. En fait ces conditions ne sont jamais réalisées et l'atmosphère est sans cesse parcourue par des courants horizontaux et verticaux.

Mais on peut appliquer les lois de la statique des fluides pour calculer la pression moyenne à une altitude donnée. La hauteur de l'atmosphère est assez faible par rapport au rayon de la terre

pour que les équipotentielles du champ de pesanteur puissent être assimilées à des plans.

La température de l'atmosphère n'est pas constante :



Dans la troposphère (de l'altitude z = 0 à z = 10 500 m), la température décroit ≃ linéairement de 290 ° K à 217 ° K. Dans la stratosphère, la température est constante (de l'ordre de - 56 °C ≃ 217 °K).

La troposphère est soumise à basse altitude à des courants horizontaux (vents) ; à une altitude plus élevée, jusque vers 10 500m), il existe des courants verticaux. Ainsi les masses d'air de la troposphère passent constamment d'un niveau à un autre et par conséquent d'une pression à une autre. La conductibilité thermique de l'air est très faible et donc ces détentes ou compressions sont adiabatiques : l'équilibre de la troposphère est un équilibre adiabatique.

Nous pouvons donc appliquer la loi de LAPLACE (18).

D'après l'équation fondamentale, on a :

$$dz = -\frac{dp}{\rho g}$$

$$\rho = \frac{1}{\sigma} \qquad p\sigma^{\gamma} = p_0 \sigma_0^{\gamma}$$ (indice 0 indiquant le niveau du sol)

$$\sigma = \sigma_0 \left(\frac{p_0}{p}\right)^{1/\gamma}$$ d'où $$dz = -\frac{\sigma_0}{g}\left(\frac{p_0}{p}\right)^{1/\gamma} dp$$

$$dz = -\frac{\sigma_0}{g} p_0^{\frac{1}{\gamma}} p^{-1/\gamma} dp$$

Intégrons : $$z = -\frac{\gamma}{\gamma - 1}\frac{\sigma_0}{g} p_0^{1/\gamma}\left[p^{\frac{\gamma-1}{\gamma}} - p_0^{\frac{\gamma-1}{\gamma}}\right]$$

$$z = K \left[I - \left(\frac{p}{p_o}\right)^{\frac{\gamma - I}{\gamma}} \right]$$

avec $K = \frac{\gamma}{\gamma - I} \frac{p_o \sigma_o}{g} = \frac{\gamma}{\gamma - I} x \frac{rT_o}{g}$

La quantité K est l'altitude pour laquelle p = 0 : c'est la hauteur totale de l'atmosphère :

$T_o = 290\ °K$, $r = \frac{R}{n_I M_I + n_2 M_2} = \frac{R}{M}$ mélange des gaz parfaits

air : 80% poids azote : M = 0,828 + 0,232 = 28,8 IO^{-3} kg

$R = 8{,}32\ J°K^{-I}$

$g = 9{,}8I$ $\quad\quad \frac{rT_o}{g} = \frac{8{,}32}{28{,}8}\ IO^3\ \frac{290}{9{,}8I} = 8{,}52\ IO^3$

$\gamma = I{,}4$ $\quad\quad K = 3\ IO^4$ m

La hauteur de l'atmosphère serait donc de 30 km : ce résultat n'est pas correcte, les phénomènes tels que les météores se produisant vers IOO km. La partie de l'atmosphère qui est au-dessus de la troposphère n'est donc pas dans des conditions adiabatiques. La <u>stratosphère</u> qui n'est plus soumise à des courants verticaux est en <u>équilibre isotherme</u>.

La loi (22) permet de calculer la variation de pression avec l'altitude :

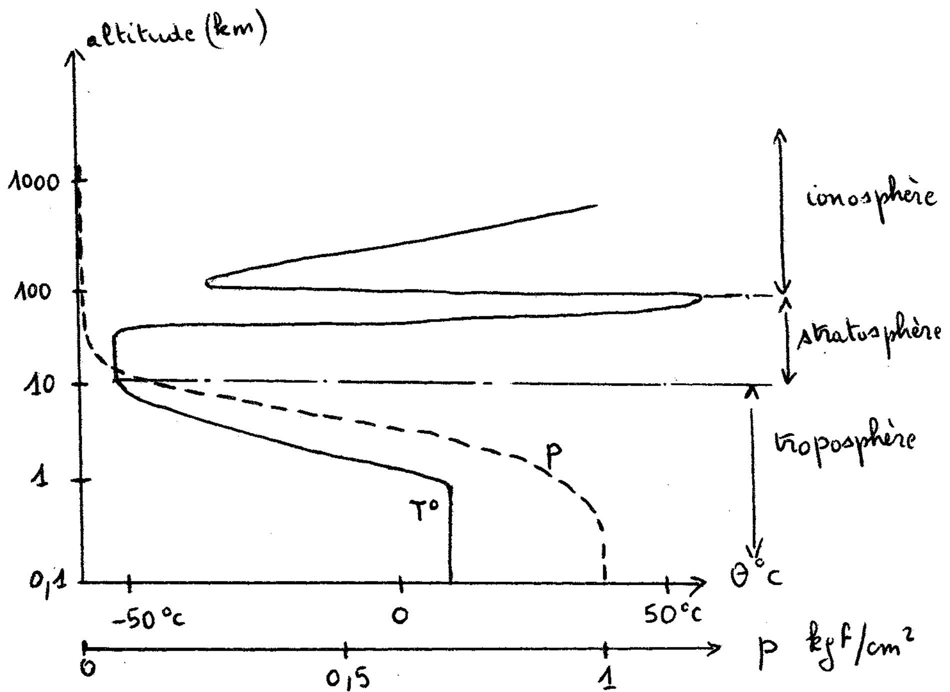
$$p = p_I\, e^{-\frac{\rho_I g}{p_I} z}$$

Origine des z : base de la stratosphère

$$\frac{p_I}{\rho_I} = r\, T \quad\quad \frac{\rho_I g}{p_I} = \frac{g}{rT}$$

p=0 pour $z = \infty$: la hauteur de l'atmosphère est infinie.

La température de la stratosphère est constante jusque vers 40km puis croit de nouveau pour atteindre vers 60 km des t° de l'ordre de 70 °C : cet échauffement serait dû à l'absorption des U. V. du soleil.


altitude (km)
1000
100
10
1
0,1
ionosphère
stratosphère
troposphère
p
T°
θ °C
-50 °c
0
50 °c
p kgf/cm²
0
0,5
1

C H A P I T R E II

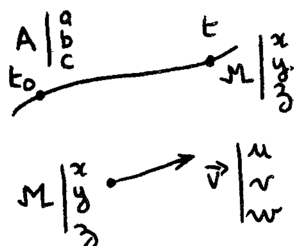
II DYNAMIQUE DES FLUIDES PARFAITS : EQUATIONS GENERALES

II-I Rappels : Variables de LAGRANGE - Variables d'EULER :

Pour étudier le mouvement d'un milieu déformable, on peut utiliser 2 types de variables indépendantes.

-a- Variables de LAGRANGE :

LAGRANGE rattache les grandeurs à déterminer au point matériel.



Soient a, b, c les coordonnées d'une particule à l'instant initial t_o. Les coordonnées x, y, z de la particule à l'instant t sont appelées variables de LAGRANGE. Ces coordonnées x_i s'expriment en fonction de a_j et t (variables indépendantes).

Les vitesses de la particule sont :

$$u = \frac{\partial x}{\partial t} \quad v = \frac{\partial y}{\partial t} \quad w = \frac{\partial z}{\partial t} \qquad u_i = \frac{\partial x_i}{\partial t}$$

Les coordonnées de l'accélération sont : $\gamma_i = \frac{\partial^2 x_i}{\partial t^2}$

-b- Variables d'EULER :

EULER rattache les grandeurs à déterminer au point géomètrique. On choisit comme variables indépendantes x, y, z coordonnées d'un point géomètrique (point fixe par rapport au repère du mouvement) et t. Les coordonnées u, v, w de la vitesse $\vec{V}$ de la particule passant par le point (x, y, z) à l'instant t sont appelées variables d'EULER. En mécanique des fluides, on emploie presque toujours les variables d'EULER, les positions initiales n'ayant pas une grande importance.

Remarque : Considérons une grandeur f (densité, vitesse) en fonction des variables d'EULER. Si on fixe les coordonnées

x, y, z, on étudie les variations de f avec t en un point géomètrique donné. Souvent, on doit considérer la dérivée par rapport à t d'une grandeur f considérée comme attachée à un point matériel P : c'est la dérivée prise en suivant l'élément dans son mouvement ou dérivée totale : $\frac{df}{dt}$.

$\frac{\partial f}{\partial t}$ représente la dérivée en un point fixe ou dérivée partielle.

On peut écrire : $\frac{df}{dt} = \frac{\partial f}{\partial x_i} \frac{dx_i}{dt} + \frac{\partial f}{\partial t}$

$df = f'_x\, dx + \ldots + f'_t\, dt$ x, y, z, t étant les varibles indépendantes.

$\frac{dx_i}{dt} = u_i$ = coordonnées de la vitesse de P

soit $$\boxed{\frac{df}{dt} = \frac{\partial f}{\partial x_i} u_i + \frac{\partial f}{\partial t}} \quad (2)$$

Les coordonnées de l'accélération de P sont :

$$\gamma_i = \frac{du_i}{dt} = \frac{\partial u_i}{\partial x_j} u_j + \frac{\partial u_i}{\partial t}$$

On a d'autre part la relation :

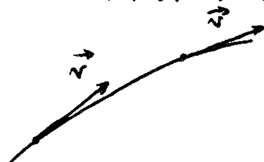
$$\frac{\partial}{\partial x_i}\left(\frac{df}{dt}\right) = \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial f}{\partial x_i}\right) + \frac{\partial f}{\partial x_j}\frac{\partial u_j}{\partial x_i}$$

Trajectoires, lignes de courant :

A un instant t donné, on connaît la vitesse $\vec{v}$ de la particule fluide qui passe en un point donné. L'ensemble des vecteurs $\vec{v}$ relatif aux points de l'espace constitue un champ de vitesses.

Les lignes tangentes en chacun de leurs points au vecteur vitesse à un instant donné t sont les lignes de courant (lignes de force du champ des vitesses). Ces lignes sont définies par les équations :

$$\text{(I)} \quad \frac{dx}{u(x, y, z, t)} = \frac{dy}{v(x, y, z, t)} = \frac{dz}{w(x, y, z, t)} \quad \text{avec } t = Cte$$



Les lignes de courant évoluent avec le temps. Toutes les lignes qui s'appuient sur un contour fermé forment un tube de courant.

Les <u>trajectoires</u> des éléments matériels s'obtiennent en intégrant le système différentiel suivant :

$$(I)' \qquad \frac{dx}{u(x,\, y,\, z,\, t)} = \frac{dy}{v(x,\, y,\, z,\, t)} = \frac{dz}{w(x,\, y,\, z,\, t)} = dt$$

<u>Remarque</u> : Passage des variables de LAGRANGE aux variables d'EULER ou inversément. $u_i = \frac{\partial x_i}{\partial t}$ E $\longrightarrow$ L

à l'aide de l'intégration du système (I)'

E $\longleftarrow$ L

II-2 Equations du mouvement en variables d'EULER :

Nous considérons un fluide parfait donc sans viscosité : les contraintes y sont indépendantes des vitesses de déformation. Le tenseur des contraintes s'écrit :

$$\sigma_{ij} = - p\delta_{ij} \qquad p : \text{pression du fluide}$$

II-2 I) Equation de continuité :

Cette équation traduit la conservation de la masse.
Soit un petit élément de volume τ, masse volumique ρ.
La masse $\rho\tau$ de cet élément est constante si le mouvement est <u>conservatif</u> (ni apparition ni disparition de fluide au cours du mouvement) :

On a donc $\qquad d(\rho\tau) = 0 \qquad$ ou $\tau d\rho + \rho d\tau = 0$

$$d\rho + \frac{\rho}{\tau}\, d\tau = 0$$

$\frac{d\tau}{\tau}$ = dilatation cubique (voir cours 3 GP) de la transformation.

Cette transformation pendant dt est $\xi_i = u_i\, dt$: vecteur déplacement

Soit $\frac{d\tau}{\tau} = \varepsilon_{ii} = \frac{\partial \xi_i}{\partial x_i} = \frac{\partial u_i}{\partial x_i}\, dt = \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z}\right) dt$

On obtient ainsi : $\frac{d\rho}{dt} + \rho\frac{\partial u_i}{\partial x_i} = 0 \qquad \frac{d\rho}{dt} + \rho \operatorname{div} \vec{V} = 0$

Exprimons la dérivée totale $\frac{d\rho}{dt}$ en fonction des dérivées partielles $\frac{\partial \rho}{\partial x_i}$ et $\frac{\partial \rho}{\partial t}$. En effet, la dérivée partielle $\frac{\partial \rho}{\partial t}$ représente la dérivée en un point fixe alors que la dérivée totale / t est la dérivee prise en suivant l'élément dans son mouvement.

On a:

$$\frac{d\rho}{dt} = \frac{\partial \rho}{\partial x_i}\frac{dx_i}{dt} + \frac{\partial \rho}{\partial t}$$

$df = f'_x\,dx + \ldots\, f'_t\,dt$ les variables indépendantes étant x, y, z, t

$$\boxed{\frac{d\rho}{dt} = \frac{\partial \rho}{\partial x_i} u_i + \frac{\partial \rho}{\partial t}} \qquad (2)$$

En remplaçant dans l'équation précédente :

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \rho \sum_i \frac{\partial u_i}{\partial x_i} + \frac{\partial \rho}{\partial x_i} u_i = \frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial (\rho u_i)}{\partial x_i} = 0$$

Soit $$\boxed{\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial (\rho u_i)}{\partial x_i} = 0} \qquad (3)$$

ou $$\boxed{\frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div}(\rho \vec{V}) = 0} \qquad (3)'$$

ou en développant $$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial (\rho u)}{\partial x} + \frac{\partial (\rho v)}{\partial y} + \frac{\partial (\rho w)}{\partial z} = 0$$

Remarques : I) Cas d'un mouvement permanent :

Un écoulement est permanent lorsque le champ de vitesses ainsi que la pression et la masse volumique ne dépendent pas du temps :

L'équation de continuité se réduit à :

$$\boxed{\operatorname{div}(\rho \vec{V}) = 0} \qquad (3)''$$

II) Cas d'un fluide incompressible : ρ = Cte

$$\boxed{\operatorname{div} \vec{V} = 0} \qquad (3)'''$$

L'équation de continuité exprime que le flux du vecteur vitesse surtout d'une surface fermée est nul.

II-2 2) Equations dynamiques : Equations d'EULER :

Reprenons les équations I-2 de la statique. L'ensemble des forces de volume et de pression doit maintenant satisfaire l'équation $\vec{\gamma} = \vec{F} - \frac{I}{\rho}\overrightarrow{\text{grad}}\, p$ ($\vec{\gamma} = 0$ dans le cas de l'hydrostatique)

On obtient donc le système d'équation suivant :

$$\gamma_i = X_i - \frac{I}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x_i}$$

ou $$\boxed{\vec{\gamma} = \vec{F} - \frac{I}{\rho}\overrightarrow{\text{grad}}\, p} \qquad (4)$$

$$\gamma_i = \frac{du_i}{dt} = \frac{\partial u_i}{\partial t} + u_j \frac{\partial u_i}{\partial x_j} \qquad \text{relation (2)}$$

soit

$$\boxed{X_i - \frac{I}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x_i} = \frac{\partial u_i}{\partial t} + \sum_j u_j \frac{\partial u_i}{\partial x_j}} \qquad (5)$$

Soit en développant :

$$\left.\begin{aligned} u\frac{\partial u}{\partial x} + v\frac{\partial u}{\partial y} + w\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial u}{\partial t} &= X - \frac{I}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x} \\ u\frac{\partial v}{\partial x} + v\frac{\partial v}{\partial y} + w\frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial v}{\partial t} &= Y - \frac{I}{\rho}\frac{\partial p}{\partial y} \\ u\frac{\partial w}{\partial x} + v\frac{\partial w}{\partial y} + w\frac{\partial w}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial t} &= Z - \frac{I}{\rho}\frac{\partial p}{\partial z} \end{aligned}\right\} \quad (5)$$

Ces 3 équations sont les équations d'EULER valables pour un fluide parfait.

II-2 3) Equation caractéristique du fluide :

C'est l'équation d'Etat du fluide qui est donnée par la physique : $F(p,\rho,T) = 0$. Elle a en général les formes suivantes :

- pour un gaz parfait ou plutôt idéal, le terme parfait étant réservé au fluide : $p = \rho r T$
- pour un liquide : $\rho(I + \alpha T + \beta T^2 - \gamma p) = \rho_0$
- pour un liquide incompressible : $\rho = f(T)$

II-2 4) Equation thermodynamique :

Elle caractérise le type de transformation subie par le fluide en mouvement :

- pour une transformation isotherme : $T = Cte$

  L'équation d'Etat s'écrie alors :

  $\rho = Cte$ pour un liquide incompressible

  $\frac{p}{\rho} = Cte$ pour un gaz idéal
- pour une transformation adiabatique : $S = Cte$
- On peut encore admettre que $\rho = Cte$ pour un liquide incomoressible ($S = f(T)$ donc $S = Cte$ entraîne $\rho = Cte$)
- Pour un gaz idéal, on a la loi de LAPLACE : $\frac{p}{\rho^\gamma} = Cte$ la transformation étant supposée réversible (pas de frottement), le mouvement est isentropique.

Les équations précédentes au nombre de 6 permettent de déterminer les 6 inconnues u, v, w, p, ρ, T qui définissent le mouvement d'un fluide.

II-2 5) Conditions aux limites - Conditions initiales :

Les équations précédentes peuvent avoir une ou plusieurs solutions. Les constantes d'intégration intervenant dans ces solutions seront déterminées par les conditions aux limites et les conditions initiales.

- Conditions initiales : ce sont les valeurs de u, v, w, p, ρ pour $t = 0$
- Conditions aux limites : le contour d'un fluide est constitué par des parois fixes ou mobiles et des surfaces libres.

Considérons d'abord le cas d'une paroi fixe d'équation $F(x,y,z)=0$. La vitesse $\vec{V}$ pour le fluide en contact avec la paroi doit être tangente à la paroi, soit $\alpha u + \beta v + \gamma w = 0$

$F(x,y,z)=0$

$\vec{V} \begin{vmatrix} u \\ v \\ w \end{vmatrix}$ $\quad \vec{n} \begin{vmatrix} \alpha = \frac{\partial F}{\partial x} \\ \beta = \frac{\partial F}{\partial y} \\ \gamma = \frac{\partial F}{\partial z} \end{vmatrix}$

Si la paroi est mobile, son équation deviendra : $F(x,y,z,t) = 0$

Les éléments fluides qui satisfont à cette équation vérifient donc l'équation suivante (ils restent en contact avec la paroi : $F = 0$)

$$\frac{dF}{dt} = \frac{\partial F}{\partial t} + u\frac{\partial F}{\partial x} + v\frac{\partial F}{\partial y} + w\frac{\partial F}{\partial z} = 0$$

Dans le cas d'une surface libre, la pression étant constante $p=p_0$, on a $p(x,y,z,t) = p_0$

On peut écrire : $\frac{dp}{dt} = \frac{\partial p}{\partial t} + u\frac{\partial p}{\partial x} + v\frac{\partial p}{\partial y} + w\frac{\partial p}{\partial z} = 0$

II-3 Différents types d'écoulements:

II-3 I) Vecteur tourbillon :

Nous avons étudié en 3ème année le tenseur $[e_{ij}]$ représentant la rotation et la déformation subies par un élément matériel :

$$[e_{ij}] = [\varepsilon_{ij}] + [\bar{\omega}_{ij}]$$

déformation rotation

$$e_{ij} = \frac{\partial \xi_i}{\partial x_j} \qquad \xi_i = \text{déplacement}$$

Pour une transformation infiniment petite qui a lieu dans l'intervalle de temps t, t + dt, les déplacements subissent des variations:

$$d\xi_i = u_i \, dt$$

Les tenseurs ε_{ij} et $\bar{\omega}_{ij}$ ont pour coordonnées :

$$\varepsilon_{ij} = \frac{I}{2}\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i}\right) dt \qquad \bar{\omega}_{ij} = \frac{I}{2}\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} - \frac{\partial u_j}{\partial x_i}\right) dt$$

La vitesse de rotation est représentée par le tenseur

$$T_{ij} = \frac{I}{2}\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} - \frac{\partial u_j}{\partial x_i}\right)$$

ou le pseudo-vecteur $\vec{T}$ appelé vecteur tourbillon du champ de vitesses.

$$\boxed{\vec{T} = \frac{I}{2} \operatorname{rot} \vec{V}} \quad (6)$$

$$t_i = \frac{I}{2}(\operatorname{rot}\vec{V})_i = \frac{I}{2}\left(\frac{\partial u_k}{\partial x_j} - \frac{\partial u_j}{\partial x_k}\right)$$

$$t_i = T_{kj}$$

$$\vec{T} \left| \begin{array}{l} t_I = \frac{I}{2}\left(\frac{\partial w}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial z}\right) \\ t_2 = \frac{I}{2}\left(\frac{\partial u}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial x}\right) \\ t_3 = \frac{I}{2}\left(\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y}\right) \end{array} \right. \qquad \left| \begin{array}{ccc} \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ u & v & w \end{array} \right|$$

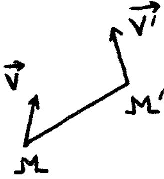
La vitesse de déformation est le tenseur de coordonnées :

$$v_{ij} = \frac{I}{2}\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i}\right)$$

Considérons deux éléments de volume entourant deux points voisins M(xyz) et M'(x'=x+h, y'=y+k, z'=z+l) à l'instant t.

Soient $\vec{V}\left|\begin{array}{l}u\\v\\w\end{array}\right.$ et $\vec{V'}\left|\begin{array}{l}u'\\v'\\w'\end{array}\right.$ les vitesses respectives en M et M'.

On a les relations :



$$\left.\begin{aligned} u' &= u + h\frac{\partial u}{\partial x} + k\frac{\partial u}{\partial y} + l\frac{\partial u}{\partial z} \\ v' &= v + h\frac{\partial v}{\partial x} + k\frac{\partial v}{\partial y} + l\frac{\partial v}{\partial z} \\ w' &= w + h\frac{\partial w}{\partial x} + k\frac{\partial w}{\partial y} + l\frac{\partial w}{\partial z} \end{aligned}\right\}$$

Nous pouvons écrire différemment ces relations en faisant apparaître la partie déformation et rotation de la transformation.

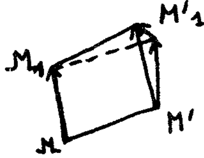
Il vient :

$$u' = u + h\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{I}{2}k\left(\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y}\right) + \frac{I}{2}l\left(\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x}\right) + \frac{I}{2}l\left(\frac{\partial u}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial x}\right) + \frac{I}{2}k\left(\frac{\partial u}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial x}\right)$$

Soit

$$\begin{aligned} u' &= u + h\frac{\partial u}{\partial x} + k\, v_{I2} + l\, v_{I3} + l\, t_2 - k\, t_3 \\ v' &= v + k\frac{\partial v}{\partial y} + h\, v_{I2} + l\, v_{23} + h\, t_3 - l\, t_I \\ w' &= w + l\frac{\partial w}{\partial z} + h\, v_{I3} + k\, v_{23} + k\, t_I - h\, t_2 \end{aligned}$$

La vitesse au point M' est la composition géomètrique de 3 vitesses:



- une vitesse $\vec{V}\begin{vmatrix} u \\ v \\ w \end{vmatrix}$: qui correspond à une translation en bloc à une vitesse $\vec{V}$
- une vitesse dont le projections sont : $r_I = lt_2 - kt_3$

$r_2 = ht_3 - lt_I$ $\qquad \vec{R} = \vec{T}\wedge\overrightarrow{MM'}$

$r_3 = kt_I - ht_2$

qui correspond à une rotation en bloc à la vitesse angulaire $\vec{T}$.

- une vitesse dont les composantes sont :

$$d_I = h\frac{\partial u}{\partial x} + kv_{12} + lv_{13} = hv_{II} + kv_{12} + lv_{13}$$

$$d_2 = hv_{12} + kv_{22} + lv_{23}$$

$$d_3 = hv_{13} + kv_{23} + lv_{33}$$

Cette vitesse correspond à une déformation $\vec{D}$.

Soit finalement : $\boxed{\vec{V'} = \vec{V} + \vec{T}\wedge\overrightarrow{MM'} + \vec{D}}$ (7)

<u>REMARQUES</u> : I) Les quantités $\overset{v_{11}}{\dfrac{\partial u}{\partial x}}$, $\overset{v_{22}}{\dfrac{\partial v}{\partial y}}$, $\overset{v_{33}}{\dfrac{\partial w}{\partial z}}$ sont des vitesses de déformation linéaire ou de dilatation.

Un élément MM' parallèle à Ox de longueur h se transforme en $M_1 M_1'$ au bout d'un temps dt, de longueur $h(1 + \frac{\partial u}{\partial x} dt)$.

Les quantités v_{12}, v_{13}, et v_{23} représentent des vitesses de déformation angulaire (on retrouve la même analogie que pour le tenseur déformation ε_{ij}).

La variation de l'angle de 2 éléments parallèles initialement aux axes Ox et Oy font au bout d'un temps dt un angle de

$$\frac{\pi}{2} - 2\, v_{12}\, dt = \frac{\pi}{2} - \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}\right) dt$$

2) Les équations d'EULER peuvent se mettre sous une forme : On a :

$$\frac{\partial u_i}{\partial x_j} = 2\, T_{ij} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i}$$

$$\text{soit } \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x_i} = X_i - \frac{\partial u_i}{\partial t} - \sum_j u_j \frac{\partial u_j}{\partial x_i} - \sum_j 2\, T_{ij}\, u_j$$

$$\sum_j u_j \frac{\partial u_j}{\partial x_i} = \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial x_i} \sum_j u_j^2 = \frac{1}{2} \frac{\partial V^2}{\partial x_i}$$

$$\sum_j 2\, T_{ij}\, u_j = 2\, \vec{T} \wedge \vec{V} \qquad \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial u_3}{\partial x_2} - \frac{\partial u_2}{\partial x_3} & \frac{\partial u_1}{\partial x_3} - \frac{\partial u_3}{\partial x_1} & \frac{\partial u_2}{\partial x_1} - \frac{\partial u_1}{\partial x_2} \\ u_1 & u_2 & u_3 \end{vmatrix}$$

Les équations d'EULER ont alors la forme suivante :

$$\boxed{\frac{1}{\rho} \operatorname{grad} p + \frac{1}{2} \operatorname{grad} V^2 + \frac{\partial \vec{V}}{\partial t} + 2\, \vec{T} \wedge \vec{V} - \vec{F} = 0}$$

$$2\, T_{ij}\, u_j = 2\, T_{i_1} u_1 + 2\, T_{i_2} v + 2\, T_{i_3} w$$

$$= \left(\frac{\partial u_i}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial x_i}\right) u + \left(\frac{\partial u_i}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial x_i}\right) v + \left(\frac{\partial u_i}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial x_i}\right) w$$

si i=1, on retrouve la 1ère composante de $2\, \vec{T} \wedge \vec{V}$

$$T_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} - \frac{\partial u_j}{\partial x_i}\right)$$

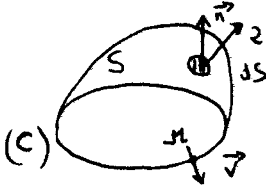
II-3 2) Mouvements irrotationnels et rotationnels :

Circulation d'un vecteur :

On appelle circulation du vecteur le long d'une courbe (C), l'intégrale :

$$\Gamma = \int_C \vec{V}.\vec{ds} = \int_C u\,dx + v\,dy + w\,dz \qquad (8)$$

La circulation le long d'une courbe (C) fermée est donnée par le théorème de STOKES : la circulation du vecteur vitesse le long d'une courbe fermée (C) est égale au flux du rotationnel de V à travers une surface limitée par la courbe C.



$$\Gamma = \iint_S \text{rot}\,\vec{V}.\vec{n}\,dS = 2\iint_S \vec{T}.\vec{n}\,dS = 2\iint_S \vec{T}.\vec{dS}$$

Mouvement irrotationnel :

En général, la circulation du vecteur $\vec{V}$ varie avec la courbe C choisie pour aller du point A au point B.



Elle ne dépend pas du chemin suivi si u dx + v dy + w dz est une différentielle totale exacte ou d'après le théorème de STOKES : $\boxed{\overrightarrow{\text{rot}}\,\vec{V} = 0}$ (9)

Les mouvements qui satisfont à cette propriété sont appelés irrotationnels : le vecteur tourbillon $\vec{T} = \frac{1}{2}\,\overrightarrow{\text{rot}}\,\vec{V}$ est nul en tout point du fluide : la rotation instantanée d'un élément de volume est donc nulle.

La condition rot $\vec{V} = 0$ exprime que le vecteur $\vec{V}$ dérive d'un potentiel : en effet on sait que $\overrightarrow{\text{rot}}\ \overrightarrow{\text{grad}}\,\Psi = 0$

Donc $$\boxed{\vec{V} = \overrightarrow{\text{grad}}\,\Psi(x,y,z,t)} \qquad (10)$$

$$u = \frac{\partial \Psi}{\partial x} \qquad v = \frac{\partial \Psi}{\partial y} \qquad w = \frac{\partial \Psi}{\partial z}$$

La fonction $\Psi(x,y,z,t)$ est appelée potentiel des vitesses. On dit aussi que le mouvement irrotationnel est un écoulement potentiel ou à potentiel des vitesses.

REMARQUE : On aurait dû en fait appeler la fonction $-\Psi$ potentiel des vitesses d'après la définition du potentiel :
$\vec{F} = -\overrightarrow{grad}\ U$

La divergence de $\vec{V}$ est égale à $\Delta\Psi$: $\operatorname{div}\overrightarrow{grad}\Psi = \Delta\Psi$

$$\operatorname{div}\vec{V} = \Delta\Psi$$

Si le fluide est incompressible, on a $\operatorname{div}\vec{V} = 0$ (relation 3"') et l'équation de continuité devient l'équation de LAPLACE :

$$\boxed{\Delta\Psi = 0} \qquad (11)$$

La fonction Ψ est harmonique.
Inversément une fonction Ψ satisfaisant à l'équation de LAPLACE peut être considérée comme un potentiel des vitesses correspondant à l'écoulement d'un fluide parfait incompressible.
Mouvement rotationnel : Lorsque le vecteur tourbillon est différent de zéro.

II-4 Théorème de BERNOUILLI :

On suppose qu'on a affaire à un fluide parfait en écoulement permanent rotationnel ou non (p, ρ, T, $\vec{V}$ indépendants t) (nous négligeons la viscosité qui peut jouer un rôle important suivant les cas).
Les forces de volume dérivent d'un potentiel : $\vec{F} = -\overrightarrow{grad}\ U(x,y,z)$ et la densité n'est fonction que de p ou constante.
Multiplions scalairement les 2 membres de la relation (4) par $\overrightarrow{dM} = \vec{V}\,dt$ déplacement réel du fluide : $\vec{\gamma} = \vec{F} - \frac{1}{\rho}\overrightarrow{grad}\ p$

$$\overrightarrow{grad}\ p\,\overrightarrow{dM} = dp \qquad \text{car } \frac{\partial p}{\partial t} = 0$$

$$\vec{\gamma}.\vec{V}\,dt = \frac{d\vec{V}}{dt}.\vec{V}\,dt = \frac{dV^2}{2}$$

soit
$$\frac{dV^2}{2} = \vec{F}.\overrightarrow{dM} - \frac{dp}{\rho} = -\,dV - \frac{dp}{\rho}$$

si l'on suit un élément fluide dans son mouvement
En intégrant :

$$\boxed{\frac{V^2}{2} + U + \int_0^M \frac{dp}{\rho} = Cte} \qquad (12)$$

l'intégrale étant effectuée le long d'une ligne de courant d'une origine abstraite O jusqu'au point M où la vitesse est V et le potentiel U. Si les forces de volume se réduisent aux forces de

gravité, V = gh. De plus si ρ est constant (fluide icompressible), on a :

$$\boxed{\frac{v^2}{2} + gh + \frac{p}{\rho} = Cte} \qquad (I3)$$

Ce sont les équations de BERNOUILLI (I738), fondamentales en mécanique des fluides.

<u>Interprétation énergétique du théorème de BERNOUILLI</u> :

Considérons l'équation de BERNOUILLI pour un fluide incompressible:

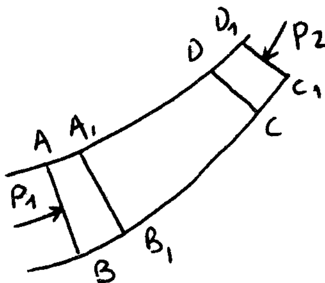
$$\rho\frac{v^2}{2} + p + \rho gh = Cte$$

$\rho\frac{v^2}{2}$ est l'énergie cinétique par unité de volume du fluide.

Le terme $p + \rho gh$ représente (confère chap. I) l'énergie potentielle de l'unité de volume du fluide dans le champ de pesanteur et sous la pression p.

La somme $\rho\frac{v^2}{2} + p + \rho gh$ correspond donc à l'énergie mécanique totale par unité de volume du fluide et l'équation de BERNOUILLI traduit la <u>conservation de cette énergie mécanique totale au cours du mouvement permanent</u>.

On peut d'ailleurs retrouver le même résultat en étudiant les échanges énergétiques d'un filet fluide avec l'extérieur (fluide parfait). Considérons une portion ABCD d'un filet



(tube courant limité par une famille de trajectoires) et appliquons le principe de conservation de l'énergie au volume fluide ABCD qui au bout du temps dt vient en $A_I B_I C_I D_I$.

Soient E l'énergie interne massique, $\frac{v^2}{2}$ l'énergie cinétique massique et U le potentiel de la force de masse, Q la quantité de chaleur fournie par l'extérieur à l'unité de masse du filet.

Le travail des forces extérieures de contact est égal au travail des forces de pression sur les sections AB et DC :

$$p_I\, dS_I\, v_I\, dt - p_2\, dS_2\, v_2\, dt = \left(\frac{p_I}{\rho_I} - \frac{p_2}{\rho_2}\right)q\, dt = (p_I\sigma_I - p_2\sigma_2)\, q\, dt$$

$\sigma_I = \frac{I}{\rho_I}$ volume massique

dS_I , v_I , p_I étant la surface, vitesse et pression de la section droite AB

dS_2, v_2, p_2 étant la surface, vitesse et pression de la section droite CD

q = débit en masse du filet = $\int_S \rho \vec{V}.\vec{dS}$

Pour un écoulement permanent conservatif, le débit en masse est constant le long d'un tube de courant :

On a donc $\rho_I V_I dS_I \, dt = \rho_2 V_2 dS_2 \, dt = dm = q \, dt$

dm = masse contenue dans $ABA_I \, B_I$ ou $DCD_I C_I$

Le principe de conservation de l'énergie s'écrit donc pour une masse unité $\left[E + U + \frac{V^2}{2} + p\sigma \right]_I^2 = Q$

Rq : La conservation de l'énergie s'écrit : premier principe

$$dW + dQ = dC + dE$$

- dW : travail des forces extérieures (travail reçu)
- dQ : chaleur reçue par le système
- dC : énergie cinétique

$$dW = -dU - pdv$$

- dW : travail des forces de volume
- $-dU$: travail des forces dérivant d'un potentiel
- $-pdv$: travail des forces de pression : dans le cas d'un fluide

soit finalement : $dQ = dC + dE + dU + pdv$.

La fonction $E + p\sigma$ = enthalpie massique = H

On obtient donc $\left[H + U + \frac{V^2}{2} \right]_I^2 = Q$

Pour un fluide parfait : $dH = \sigma dp + T \, dS$

mais $dQ = T \, dS$

Il vient $\left[U + \frac{V^2}{2} \right]_I^2 + \int_I^2 dH = \int_I^2 dQ$

$$\left[U + \frac{V^2}{2} \right]_I^2 + \int_I^2 \sigma dp + T \, dS - T \, dS = 0$$

$$\left[\frac{V^2}{2} + U\right]_I^2 + \int_{M_I}^{M_2} \frac{dp}{\rho} = 0$$

On retrouve l'équation de BERNOULLI (éq. I2)
si $U = gh$ et si ρ = Cte (fluide isovolume), on retrouve l'équation (I3).

<u>Remarque</u> : Si le mouvement est adiabatique : $Q = 0$ et

on a $\left[H + \frac{V^2}{2} + U\right]_I^2 = 0$

soit $H + \frac{V^2}{2} + U$ = Cte le long d'un filet

<u>Application aux gaz</u> :

Dans le cas d'un gaz, les forces massiques sont en général négligeables. Le théorème de BERNOULLI s'écrit donc :

$$\frac{V^2}{2} + \int \frac{dp}{\rho} = Cte$$

Dans le cas d'une définition adiabatique : $\frac{V^2}{2} + H = Cte$

Si le gaz s'écoule par une tuyère d'un réservoir où la pression est p_o, la densité ρ_o, t° absolue T_o vers une enceinte où la pression est $p_I < p_o$, on peut négliger la vitesse V_o dans le réservoir et on a alors : $\frac{V^2}{2} = -\int_{p_o}^{p_I} \frac{dp}{\rho}$ formule de SAINT-VENANT et WENTZEL

$\frac{V^2}{2} = H_o - H_I$ formule de ZEUNER

<u>Cas d'un gaz polytropique</u> : $p = k\rho^k$ ou $\rho = bp^{1/k}$

$$\int \frac{dp}{\rho} = \frac{I}{b(I - 1/k)} p^{I-1/k} = \frac{k}{k-I} \frac{p}{\rho}$$

Soit

$$V^2 = \frac{2k}{k-I}\left(\frac{p_o}{\rho_o} - \frac{p_I}{\rho_I}\right) = \frac{2k}{k-I} \frac{p_o}{\rho_o}\left[I - \left(\frac{p_I}{p_o}\right)^{I-1/k}\right]$$

<u>Cas d'une transformation adiabatique</u> :

L'enthalpie a pour valeur :

$$H = E + p\sigma = C_v T + rT = C_p T$$

Soit $V^2 = 2\, C_p(T_o - T)$

mais $T = \frac{p}{r\rho}$ et $r = C_p - C_v = C_p \frac{\gamma - I}{\gamma}$ $\gamma = \frac{C_p}{C_v}$

$$\gamma = C_p \left(I - \frac{C_v}{C_p}\right) = C_p \left(I - \frac{I}{\gamma}\right)$$

On obtient ainsi pour V^2 une expression identique à l'expression précédente où k est remplacé par γ.

Les vitesses des gaz et les variations de température sont très importantes. Ainsi pour l'air (γ=I,4I ρ=I,293 kg/m^3 à 0° et I atm.$\simeq$ I0^5 Pa) détendu de I0 à I bar, la vitesse V est égale à : (t° initiale : 290°K)

$$V^2 = \frac{2,82}{0,4I} \times \frac{I}{I,293} \times \frac{290}{273}\left[I - \left(\frac{I}{I0}\right)^{\frac{0,4I}{I,4I}}\right] I0^5$$

$$= 57 \left[I - 0,5I2\right] I0^4 \; m^2 s^{-2}$$

$$V \approx 530 \; m/s$$

$$\frac{T}{T_o} = \frac{p_I}{\rho_I}\,\frac{\rho_o}{p_o} = 0,5I2 \text{ soit } T = I48 \; °K$$

$$\frac{T}{T^o} = \frac{p_I}{\rho_I}\,\frac{\rho_o}{p_o} = \frac{p_I}{p_I^{I/\gamma}}\,\frac{p_o^{I/\gamma}}{p_o} = \left(\frac{p_I}{p_o}\right)^{I-I/\gamma}$$

Généralisation de la relation de BERNOULLI

Les frottements dans les fluides provoquent une transformation d'énergie mécanique en énergie thermique. Ces frottements se comportent comme un récepteur qui absorbe une énergie mécanique R par unité de masse de fluide qui la traverse.

Il peut exister de véritables récepteurs hydrauliques (turbines) qui absorbent l'énergie du fluide pour la transformer sous forme mécanique, électrique, etc...

La conservation de l'énergie s'écrit alors :

$$\left[\frac{V^2}{2} + U\right]_I^2 + \int_{M_I}^{M_2} \frac{dp}{\rho} = - R$$

Si le fluide est incompressible et si U = gh, on obtient :

$$\frac{V_2^2}{2} + gh_2 + \frac{p_2}{\rho} + R = \frac{V_I^2}{2} + gh_2 + \frac{p_I}{\rho}$$

ou $$\boxed{\rho\frac{V_2^2}{2} + p_2^* + \rho R = \rho\frac{V_I^2}{2} + p_I^*}$$ pour un récepteur

Relation valable pour un fluide incompressible en mouvement permanent dans le champ de pesanteur.

La quantité $\frac{V^2}{2g} + \frac{p^*}{\rho g} = \frac{V^2}{2g} + \frac{p}{\rho g} + h = \frac{p_t}{\rho g}$ = charge totale (homogène à une longueur)

ρg = poids volumique du fluide.

$\frac{p^*}{\rho g} = \frac{p}{\rho g} + h$ = hauteur piézomètrique.

L'équation précédente s'écrit encore :

$$\frac{V_2^2}{2g} + \frac{p_2^*}{\rho g} + \frac{R}{g} = \frac{V_I^2}{2g} + \frac{p_I^*}{\rho g}$$

Lors de la traversée du récepteur, il y a un abaissement de la charge totale de $\frac{R}{g}$.

Il existe naturellement des générateurs (pompes) qui fournissent de l'énergie mécanique R par unité de masse du fluide et qui augmentent la charge d'écoulement. Il suffit de changer le signe de $\frac{R}{g}$:

$$\frac{V_I^2}{2g} + \frac{p_I^*}{\rho g} = \frac{V_2^2}{2g} + \frac{p_2^*}{\rho g} - \frac{R}{g}$$

II-5 Théorème d'EULER :

II-5 I) Rappel du théorème du centre d'inertie (ou de gravité) :

La dérivée par rapport au temps de la quantité de mouvement d'un point matériel est égale à la force appliquée : c'est la relation fondamentale de la dynamique du point matériel.

$$\vec{F} = m\vec{\gamma} = \frac{dm\vec{V}}{dt}$$

forces appliquées : forces de surface et forces de volume.

Pour un système de points matériels, on a la relation :

$$\sum_k \vec{F}_k = m \frac{d\vec{v}}{dt} = \sum_k \frac{dm_k \vec{v}_k}{dt}$$

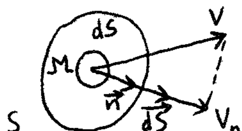
d'où Théorème de centre d'inertie : Le mouvement du centre d'inertie G du système est celui d'un point matériel G ayant pour masse la masse totale du système et qui serait soumis à la force totale appliquée au système.

II-5 2) Débit massique :

Le débit massique à travers une surface S est égale à :

$$q = \int_S \rho \vec{V} \cdot d\vec{S} = \int_S \rho V_n \, dS$$

vecteur unitaire $\vec{n} \begin{cases} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{cases}$ $\quad \vec{dS} \begin{vmatrix} \alpha \, dS \\ \beta \, dS \\ \gamma \, dS \end{vmatrix}$



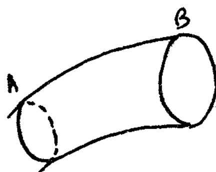
$$q = \int_S \rho(u\alpha + v\beta + w\gamma)dS$$

$$q = \iint_S \rho\,(udydz + vdzdx + wdxdy)$$

Cas d'un tube de courant :

Pour un écoulement permanent et conservatif, le débit massique est constant le long d'un tube de courant.

Considérons en effet la surface fermée comprise entre 2 sections A et B du tube de courant.



Aucune masse de fluide ne traversant la surface latérale, les débits à travers les 2 sections A et B sont identiques.

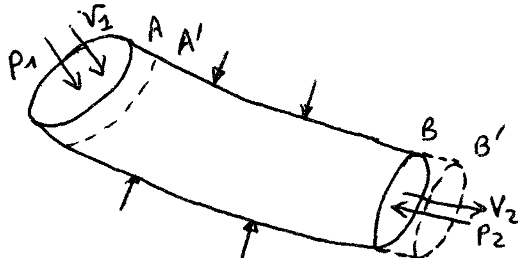
Si les sections S_A et S_B sont suffisamment petites (filet de courant) (p,V et ρ constants pour chaque section) on pourra écrire :

$$\rho_A \, V_A \, S_A = \rho_B \, V_B \, S_B$$

Remarque : débit en volume est $q_v = \int_S \vec{V}\,\vec{dS}$

II-5 3) Théorème d'EULER :

Soit un écoulement permanent de fluide incompressible. Considérons le système matériel formé par la partie du tube de courant compris entre les 2 sections A et B au temps t. Nous supposerons que le tube de courant est assez étroit pour que dans une section droite, les quantités p, ρ ,V restent constantes.



A l'instant t+dt, la même masse de fluide sera comprise entre les sections A' et B'. L'écoulement étant permanent, la masse de fluide comprise entre les sections A' et B' est la même à l'instant t+dt qu'à l'instant t ($\frac{\partial \rho}{\partial t} = 0$).

Si q est le débit massique à travers le tube de courant, V_I et V_2 les vitesses en A et B, les masses de AA' et BB' sont égales à $dm = q\ dt$. La variation de quantité de mouvement $d\Sigma m\vec{V}$ pendant le temps dt est donc égale à : $q\ \vec{V_2}\ dt - q\ \vec{V_I}\ dt$

On en déduit que :

$$\boxed{\frac{d}{dt}\Sigma m\vec{V} = q(V_2 - V_I) = \Sigma\vec{F}} \qquad (I5)$$

$\Sigma\vec{F}$ représentent les forces appliquées au volume du tube de courant compris entre A et B ; elles comprennent :

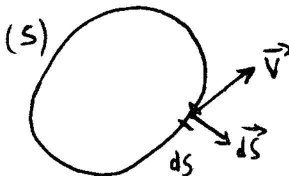
- les forces de volume $\vec{P}$ due à la pesanteur
- les forces de surface : forces de pression exercées sur toute la surface de l'élément considéré par le fluide extérieur ou les parois : $\vec{R}$

On aura donc $\boxed{q\ (\vec{V_2} - \vec{V_I}) = \vec{R} + \vec{P}}$ Théorème d'EULER

$q\vec{V_2}$: débit de quantité de mouvement sortant par la section B

$-q\vec{V_I}$: " " " A

Le raisonnement précédent peut se généraliser au cas d'une surface fermée S tracée dans le fluide.



Pour un élément de surface dS, il sort par unité de temps un débit de masse égal à :

$$d\rho = \rho\ \vec{dS}.\vec{V} = \rho\, dS\ V_n$$

La quantité de mouvement correspondante est : $d\rho\ \vec{V} = \rho\ dS\ V_n\ \vec{V}$

On comptera positivement une quantité de mouvement qui entre dans S et négativement toute quantité qui en sort.

On aura donc l'égalité suivante :

$$\int dq\ \vec{V} = \int_S \rho dS\ V_n\ \vec{V} = \Sigma\vec{F} \qquad (I6)$$

$\Sigma\vec{F}$ représentent le système des forces appliquées au fluide contenu dans S.

d'où le <u>théorème d'EULER</u> :

> En régime permanent, le débit total de quantité de mouvement sortant de S est équivalent au système au système des forces appliquées au fluide que contient la surface S.

REMARQUE :

Le théorème d'EULER ne fait pas intervenir la conservation de l'énergie mécanique. Il permet la détermination des forces agissant sur un volume de fluide connaissant seulement les vitesses des éléments situés sur la surface qui limite le volume . Ce théorème est applicable aussi bien aux fluides parfaits qu'aux fluides réels.